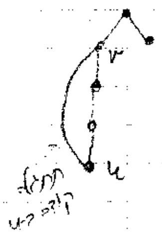
18.11.08 ①

אלגוריתמים - שיעור 3



בגרף לא מכוון יש רק 2 סוגים של קשתות - קשתות עץ וקשתות אחוריות, כיוון שכל הקשתות מתגלות לראשונה.

ואכן, נסתכל בקשת (u,v) ונניח שהיא מתגלה לראשונה ב-u.
אם v לבן באותו הרגע ← קשת עץ. אם לא, v כבר התגלה קודם.
$d(v) < d(u)$. v חייב להיות במחסנית ברגע זה ≡ הוא אינו שחור
כי אחרת, לפני כן, הוא צריך לבדוק את שכנו u ← הקשת כבר הייתה
צריכה להתגלות ← v במחסנית ← v אב קדמון של u ← (u,v) קשת
אחורית.

עקרון המסלול הלבן

נניח שב-G יש מסלול $v_0 \to v_1 \to v_2 \to v_3 \to \dots \to v_k$ ונניח שהקודקוד הראשון במסלול שה-DFS מגלה הוא v_0. אז כל שאר הצמתים יהיו צאצאים של v_0 ב-DFS.

הוכחה: באינדוקציה על k אורך המסלול.

$k=0$ ברור (V_0 צאצא של עצמו).

נניח נכונות ל-$k-1$ ונסתכל על מסלול באורך k

$$V_0 \to V_1 \to \dots \to V_{k-1} \to V_k$$

V_{k-1} צאצא של V_0 (ע"פ הנחת האינדוקציה). V_{k-1} מתגלה אחרי V_0 ומסתיים לפני סיום V_0. בין לבין, V_{k-1} בודק את שכניו כולל V_k. ולכן, ברגע זה אם לא קודם V_k מתגלה.

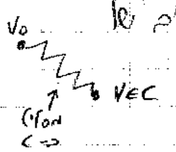
מכאן, $d(V_0) < d(V_k) < f(V_{k-1}) < f(V_0)$, לכן, ע"פ עקרון הקינון, V_k צאצא של V_0.

שימושים

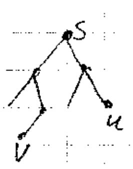
① מציאת רכיבי קשירות בגרף לא מכוון G -
נריץ DFS, כל עץ ביער שלו הוא רכיב קשירות.

הוכחה: כל עץ הוא קשיר ולכן מוכל ברכיב קשירות אחד.

מן הצד השני, אם C רכיב קשירות ו-V_0 הוא הצומת הראשון ב-C שה-DFS מגלה, אז כל צמתי C מופיעים כצאצאים של V_0 (עקרון המסלול הלבן). $O(|E|+|V|)$.

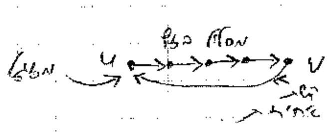


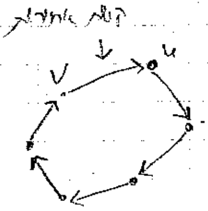
② האם שני צמתים v,u נמצאים באותו רכיב קשירות?
אחרי הרצת DFS, אם הם באותו עץ אז באותו רכיב קשירות. נבצע את הבדיקה ע"י הליכה אחורה באמצעות מצביעי π ובדיקה האם יש להם שורש משותף. $O(|V|)$ וזה תלוי ב-$|E|$ (אחרי הרצת ה-DFS).



③ נתון גרף מכוון/לא מכוון, לבדוק האם G מכיל מעגל
מריצים DFS, אם קיימת קשת אחורית אז קיים מעגל (ולהפך). (קיים מעגל ⇔ קיים קשת אחורית)

הוכחה:
א. נניח שקיימת קשת אחורית (u,v)





ב. נניח שקיים מעגל ונניח ש-u היא הצומת הראשון במעגל שה-DFS מגלה.
עקרון המסלול הלבן גורר שכל השאר צאצאים של u ובפרט הצומת הקודם ל-u במעגל (נסמן כ-v) ולכן הקשת מ-v ל-u היא קשת אחורית.

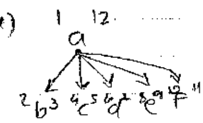
$O(|E|+|V|)$

④ מיון טופולוגי של גרף מכוון אציקלי (DAG) G

(אציקלי - ללא מעגלים)

לסדר את צמתי G בסדר מלא $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ $(|V|=n)$ כך שלכל קשת $(v_i,v_j)\in E$ מתקיים $i<j$.

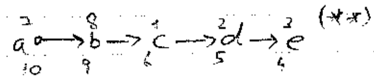
דוגמה למיון טופולוגי: (*)



מיון טופולוגי: $a\ \underbrace{c\ d\ e\ b\ f}_{\text{כל תמורה אפשרית}}$ ← ראשון

מיון טופולוגי אינו יחיד בהכרח.

דוגמה נוספת: (**)



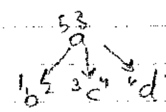
מיון טופולוגי a b c d e יחיד!

אם בגרף יש מעגל, לא קיים מיון טופולוגי $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ (כי לפחות אחת הקשתות של המעגל חייבת לחזור אחורה).

אם אין מעגל, תמיד קיים ונחשבו ע"י DFS. נריץ DFS והסדר של הצמתים יהיה סדר $f(\cdot)$ שלהם אבל במהופך. כלומר v_1 יהיה לה עם ערך f מקסימלי וכך הלאה.

לכן בדוגמה (*) הסדר יהיה a f e d c b.

בדוגמה אחרת (נתחיל עם b, c, d)



הסדר יהיה a d c b.

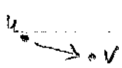
בדוגמה (**) אכן נקבל את הסדר היחיד האפשרי.

$O(|E|+|V|)$.

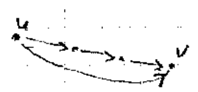
טענה: אם $(u,v)\in E$ אז $f(u)>f(v)$

הוכחה: לפי סוג הקשת.

קשת עץ - v מסתיים ראשון ולכן נכון



קשת קדמית - אותו דבר.



קשת אחורית - אין, כי אין מעגלים.

קשת חוצה - תמיד מכוונת מצומת שהתגלה אחר לצומת שהתגלה קודם ולכן גם $f(u)>F(v)$.

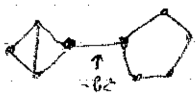
18.11.08 ③

5) מציאת גשרים, קדקדים מנתקים ורכיבי דו קשירות

G גרף לא מכוון (וקשיר)

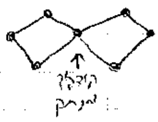
G דו-קשיר (biconnected) אם מחיקת קשת אחת (כלשהי) לא תנתק את G
(כלומר G ישאר קשיר). במילים אחרות, כל קשת נמצאת על איזשהו מעגל.
קשת שלא נמצאת על מעגל, מחיקתה תנתק את הגרף (גשר).

דוגמה לגרף דו קשיר: מעגל



דוגמה לגרף עם גשר (ולכן אינו דו קשיר)

קודקוד מנתק הוא כזה שמחיקתו יחד עם כל הקשתות שיוצאות ממנו, היא כזה שינתק את הגרף. למשל,

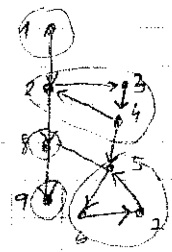


(*) בגרף זה אין גשר. ניתן להגדיר שהוא דו קשיר מבחינת קשתות אך אינו דו קשיר בקודקודים.

6) מציאת רכיבי קשירות חזקה בגרף מכוון

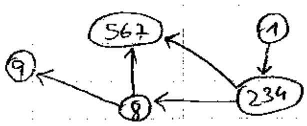
גרף מכוון הוא קשיר חזק אם מכל צומת ניתן להגיע לכל צומת אחר (במסלול מכוון). אם לא, ניתן לפרק את V לרכיבים זרים מקסימליים, כך שכל רכיב הגרף המושרה עליו קשיר חזק.

(*3)



(*) נשים לב שבניגוד לרכיבי קשירות בגרף לא מכוון, כאן יש קשתות בין רכיבי הקשירות.

נסתכל על כל רק"ח כצומת 1



זהו DAG (אין בו מעגלים) ומכונה גרף העל

למשל: נתון G מכוון ורוצים לבדוק אם הוא קשיר חזק.

מספיק לקבוע שרירותית צומת אחד (s) ולבדוק:
א) שניתן להגיע מ-s לכל צומת אחר.
ב) שניתן להגיע מכל צומת אחר ל-s.
אם א' ו-ב' מתקיימים, G קשיר חזק (ניתן להגיע מצומת כלשהו u לצומת כלשהו v נלך מ-u ל-s (לפי ב) ומ-s ל-v (לפי א')).

לבדוק את א) נריץ DFS מ-s ונבדוק שקיבלנו עץ אחד.
אם כן, תכונה (א) מתקיימת ואם לא, נשתמש בעקרון המסלול הלבן:
עבור u צומת שאינו בעץ, כלומר עדיין לבן וכל כאת יש מסלול מ-s
ל-u. זהו מסלול לבן ו-s הראשון שמתגלה ← u בן צאצא של s.

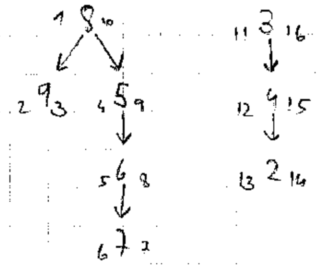
לבדוק את (ב) נבנה את הגרף ההפוך $G^T=(V,E^T)$, $E^T=\{(v,u)\mid(u,v)\in E\}$,
ונריץ DFS מ-s על G^T ונבדוק שיש רק עץ אחד.

חישוב רכ"חים בגרף מכוון G

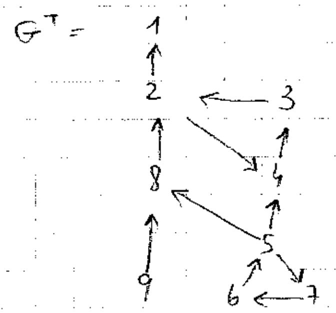
1) נריץ DFS על G ונסדר את הצמתים לפי סדר $f(\cdot)$ יורד. נקרא לרשימה L.
2) נבנה את הגרף ההפוך G^T.
3) נריץ DFS על G^T כאשר הלולאה הראשית משתמשת ב-L כתור רשימת הצמתים.

4) כל עץ ב-DFS השני הוא רק"ה.

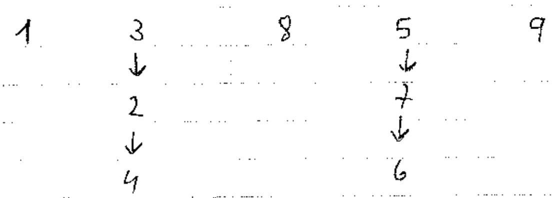
לדוגמה, הרצה בגרף (3*) (החל מצמתים 1, 3, 8)



L= 1 3 4 2 8 5 6 7 9



כעת, עלינו להריץ את DFS על G^T עפ"י L



בניית G^T מתוך G ע"י מעבר על רשימות השכנויות של G.
לדוגמה בגרף (3*):

1	2
2	3, 8
3	4
4	2, 5
⋮	

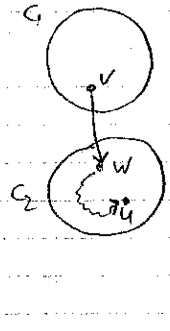
2	1, 4	...
3	2	...
4	3	...
8	2	...
5	4	...
⋮		

נכונות:

לכל רק"ה C כל צמתיו נמצאים בעץ אחד של ה-DFS השני. כי (ע"פ עקרון המסלול הלבן, הצומת הראשון של C, (u) שמתגלה, כל השאר יהיו צאצאים שלו.

גרף הרק"ה $H(G)$: הצמתים שלו הם הרק"ה-ים של G ויקשת מחברת (C_1, C_2) אם ב-G יש קשת שמחברת צומת כלשהו $V_1 \in C_1$ לצומת $V_2 \in C_2$.

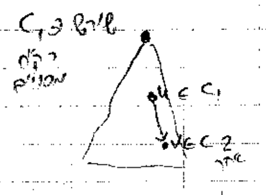
טענה: יהיו C_2, C_1 רק"ה-ים עם קשת בגרף הרק"ה $C_1 \to C_2$ אז מבין הצמתים של $C_1 \cup C_2$, זה עם ערך f מקסימלי (מריצת ה-DFS הראשונה) נמצא ב-C_1.



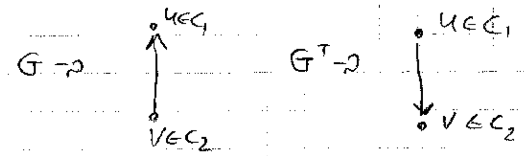
הוכחה: נקרא לצומת הזה u ונניח בשלילה שהוא ב-C_2.
נסתכל על מסלול $\underbrace{u \to \dots \to w}_{C_2} \to v$. במסלול הזה
u מתגלה ראשון ב-DFS הראשון, (אחרת) כיון $f(v)<f(u)$,
אז $d(u) < d(v)$ אחרת v היה מקונן ב-u ובפרט v היה
צאצא של u ובפרט קיים מסלול מ-u ל-v ב-G
ולכן לא ייתכן כי C_1, C_2 הם 2 רק"ה.

לכן, חייב להתקיים $d(v)<f(v)<d(u)<f(u)$, כלומר, v
הסתיים לפני ש-u התגלה. אבל, הראשון שהתגלה במסלול (נסמן ב-z)
אינו u (יכול להיות v או משהו אחר), ולכן, לפי המסלול הלבן
u צאצא של z ולכן $f(z) > f(u)$ וסתירה למקסימליות $f(u)$!

נניח שלא ייתכן ששני רק"חים (נכנסים) לאותו עץ ב- DFS השני. נניח
לצורך הוכחה כי זה נכון בעצי ה- DFS השני.



נסתכל על העץ הראשון שהוא מייצר. נניח שלעץ הזה נכנס גם
רק"ח אחר.



לכן, הצומת עם ערך f המקסימלי (נמצא ב-C_2). אם לשורש השייך ל-C_1 יש f מקסימלי
בכל העץ (הוא הראשון ב-2). לכן בעץ הראשון יש רק רק"ח אחד C_1.