16.12.08 (1) אלגוריתמים - שיעור 7

אלגוריתם של דייקסטרה Dijkstra עובד כשהמשקלות הם אי שליליים.

האלגוריתם משתמש בתור עדיפויות Priority Queue. (ראה את קוד האלגוריתם בחוברת).

S הוא קב' הצמתים v שכבר הוצאנו מהתור ושעבורם כבר חישבנו את $\delta(s,v)$. התור ממוין לפי $d()$ (כלומר $d()$ הוא המפתח). נניח להתחיל מ-s. בכל שלב עושים איתו כלום.

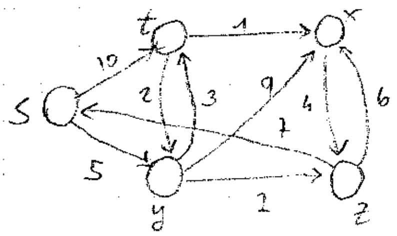
לוגיקת האלגוריתם, שולפת מהתור העדיפויות Q את הצומת עם המפתח המינימלי (כל עוד התור אינו ריק) ומבצעת Relax על כל השכנים שלו.

אחרי שמוציאים מ-Q את הצומת המינימלי u ומבצעים Relax על כל שכניו v:

1) אם $v \notin Q$ אין צורך ב-Relax ואין לו השפעה גם אם נעשה אותו.

2) אם $v \in Q$ וה-Relax משפר, זה גורר פעולת decrease key(v) על התור.

דוגמאת הרצה (מהספר):



	s	t	x	y	z
Q:	0	∞	∞	∞	∞
		10	∞	5	∞
		8	14		7
		8	13		
			9		

<u>ניתוח זמן ריצה:</u>

זמן הריצה מורכב מפעולות על התור Q + $O(|E|+|V|)$

החלק של $O(|E|+|V|)$ הוא בגלל שבלולאת ה-while שלנו אנחנו מוציאים כל צומת מהתור (לפי ההגדרה) ובודקים את כל אחד מהשכנים שלו. לכן, עוברים על כל צומת פעם אחת ועל כל קשת מקסימום פעמיים (במקרה של גרף לא מכוון).

אנו מבצעים $|V|$ פעולות של extract-min ולכל היותר $2|E|$ פעולות של decrease key. יותר נכון יש לכל היותר $|E|$ פעולות decrease key כי עבור כל קשת, בפעם הראשונה שאת הצמתים שלה אנחנו מבצעים (u,v) decrease key ובפעם השנייה שנעבור, אחד הצמתים לא יהיה בתור לכן לא יתבצע decrease key.

לכן, אם נשתמש בערימה רגילה, הסיבוכיות תהיה $O((|E|+|V|)\log|V|)$ ואם נשתמש בערימת פיבונאצ'י $O(|V|\log|V|+|E|)$.

<u>נכונות:</u>

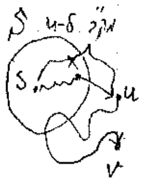
<u>טענה:</u> כאשר מוציאים צומת u מהתור מתקיים $d(u)=\delta(s,u)$.

<u>הוכחה:</u> באינדוקציה על סדר הוצאת הצמתים מ-Q. הראשון שיוצא הוא s: $d(s)=0=\delta(s,s)$ כמובן.

נניח נכונות עד להוצאת צומת u ונסתכל מה קורה כש-u יוצא מ-Q.
נניח u נגיש מ-s כי אחרת $d(u)=\infty=\delta(s,u)$ (כבר הוכחנו את זה) ונסתכל על מסלול קצר מ-s אליו.

16.12.08

אלגוריתמים - שיעור 7



נשתמש בקבוצה S של הצמתים שכבר יצאו מ-Q.

v עדיין לא ב-S אבל s כן. נסתכל על מק"ב על הצומת הראשון מחוץ ל-S. הצומת יכול להיות v עצמו אך לא בהכרח לכן נסמנו כ-u את קודמו כ-x. נשים לב ש $x \in S$ ולכן כבר יצא קודם מ-Q. לכן כאשר x יצא מ-Q התקיים $d(x)=\delta(s,x)$. אז התבצע Relax על הקשת (x,u) אין זה ה Relax ששיפר וכן אם לא, אחרון התקיים
$d(u) \le d(x)+w(x,u) = \delta(s,x)+w(x,u)=\delta(s,u)$ אבל תמיד וכן ההפך ולכן שוויון,
כלומר באותו הרגע $d(u)=\delta(s,u)$. אבל v יצא מ-Q לפני u ולכן $d(v) \le d(u)$.

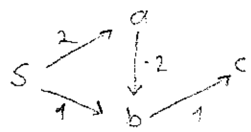
$$\underline{\delta(s,v)} \le d(v) \le d(u) = \underline{\delta(s,u)} \quad , \quad \delta(s,v) = \delta(s,u) + \text{אורך מסלול בין } v \text{ ל-} u .$$

זה גדול או שווה ל-0 כי כל המשקלות אי שליליים

סה"כ קיבלנו $\delta(s,v) \le \ldots \le \delta(s,u)$ ולכן הכל שוויון וכבר $\delta(s,v)=d(v) (=d(u))$

(*) כלומר הראנו ש כל המק"ב בין u ל-v היא באורך 0.

דוגמאת הרצה עם משקלות שליליים שנכשלת:



s	a	b
0	∞	∞
	2	1

נכשל!

All-pairs Shortest paths

מק"ב בין כל זוג הצמתים בגרף.

נשים לב שגודל הפלט המינימלי היא $\Theta(|V|^2)$.

פתרונות נאיביים: ① נניח שיש משקלות שליליים (אך לא מעגלים שליליים). נריץ BF $|V|$ פעמים, כל פעם עם צומת אחר בתפקיד s צומת התחלה.

זמן הריצה הוא $|V|$ פעמים זמן של BF, כלומר $O(|V|^2|E|)$ ויכול להגיע עד $O(|V|^4)$.

② אם כל המשקלות אי שליליים נריץ את דייקסטרה $|V|$ פעמים.

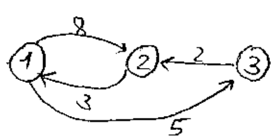
זמן הריצה $O(|V|(|V|\log|V|+|E|)) = O(|V|^2\log|V|+|E||V|)$ ויהיה לכל $O(|V|^3)$.

כדי להציג הקודם, נשתמש בהצגת הגרף ע"י מטריצת שכנויות וגם את הפלט נייצג בצורה מטריציונית. בעתיד ייצוג הגרף יהיה ע"י מטריצה W. ניתן לצמתים מספרים סידוריים כלשהם $v_1, v_2, \ldots, v_n$ $(n=|V|)$.

נגדיר:

$$W_{ij} = \begin{cases} 0 & i=j \Rightarrow (\text{אין מעגלים שליליים}) \\ \infty & (i,j) \notin E \\ w(i,j) & (i,j) \in E \end{cases}$$

דוגמה:



$$W = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 5 \\ 3 & 0 & \infty \\ \infty & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

16.12.08 ③

אלגוריתמים - שיעור 7

מטריצה D

D_{ij} מייצג אורך מסלול מ-i ל-j הקצר ביותר שהתגלה עד כה.

אתחול: $\begin{pmatrix}0&\infty&\infty\\ \infty&0&\infty\\ \infty&\infty&0\end{pmatrix}$ יש מטריצה טובה יותר, היא W ולכן (נאתחל) $D \leftarrow W$.

מטריצה Π של מצביעים

Π_{ij} הוא מצביע לצומת הקודם ל-j במסלול הטוב ביותר שהתגלה עד עתה מ-i.

אתחול:

$$\Pi_{ij} = \begin{cases} nil & i=j \\ nil & W_{ij}=\infty \\ i & W_{ij}<\infty \end{cases}$$

(א) הצומת הקודם במסלול הוא ריק כיוון שזה מגיע לאותה הצומת. אם מגיע שאורך המסלול הוא ∞ אז אין מסלול ולכן שאין גם nil. אם יש מסלול קטן מ-∞ (בצעד האתחול) המשמעות היא שיש קשת ולכן הצומת הקודם הוא הצומת ממנו מחובר הקודקוד).

אלגוריתם ראשון: מבצע את בלמן-פורד באופן מטריציאלי.

Relax $i \rightsquigarrow j \to k$

Relax יתבצע $i \rightsquigarrow k \to j$ $\quad \min\{D_{ij}, D_{ik}+W_{kj}\}$ $(k \neq j)$ $D_{ij}+W_{jj}$

(נעשה זאת בבת אחת לכל הקשתות הנכנסות ל-j (ונשנה את k). כלומר, נבצע Relax ב:

$$D_{ij} \leftarrow \min_{1\le k\le n}\{D_{ik}+W_{kj}\} \quad (\forall i,j)$$

זהו בעצם צעד ① של בלמן-פורד.

אם אין מעגלים שליליים אנו נזקקים ל- $|V|-1$ איטרציות וסה"כ $|V|-1$ איטרציות.

הערכת סיבוכיות

$D'_{ij} \leftarrow \min\{D_{ik}+W_{kj}\}$ $\forall i,j$ (נזכר) שרשרת הכפל כתוב $D'_{ij} \leftarrow \sum_{k=1}^{n}\{D_{ik}\cdot W_{kj}\}$ $\forall i,j$

כלומר כאילו "כפל מטריצות" $D' = D \circ W$.

$$D^{(1)} = W \ , \ D^{(2)} = W \circ W \ , \ D^{(3)} = (W \circ W) \circ W \ , \ldots$$

דוגמה

$$\begin{pmatrix}0&8&5\\3&0&\infty\\ \infty&2&0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0&8&5\\3&0&\infty\\ \infty&2&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&7&5\\3&0&8\\5&2&0\end{pmatrix}$$

(מחליפים כפל בחיבור וחיבור בפעולת min)

זמן ריצה $O(|V|^3) = O(n^3)$ למטריצה אחת, ובסה"כ $O(|V||V|^3) = O(|V|^4)$.

אנחנו בעצם רוצים W^{n-1}, לדוגמה רוצים $W^8 = ((W^2)^2)^2$. כלומר, במקום לחשב $(((((((W\cdot W)\cdot W)\cdot W)\cdot W)\cdot W)\cdot W)\cdot W)$ אפשר לחשב $((W\cdot W)(W\cdot W))((W\cdot W)(W\cdot W))$ כי כפל מטריצות הוא אסוציאטיבי.

גם בפעולות החדשות הכפל הוא אסוציאטיבי. $(AB)C = A(BC)$ זה נכון כאן אסוציאטיביות הפעולות הבסיסית של כפל וחיבור. הדיסטריבוטיביות שחיבור קומוטטיבי, וגם מתקיים חוק הפילוג. $[a(b+c)=ab+ac]$.

נשים לב, $\min(a,\min(b,c))=\min(\min(a,b),c)$. וכן, $a+\min(b,c)=\min(a+b,a+c)$.

<u>הערה:</u> בלמן-פורד מבצע $V-1$ איטרציות ואילו אני רק $V-2$ כי המצב שלי הוא כמו איטרציה ראשונה של בלמן פורד.

זמן ריצה $O(|V|^3\log|V|)$.

<u>הערות:</u>

1. אם יש מעגלים שליליים, נגלה אותם "בלי לחשוב" כמו בלמן-פורד, (נבצע פעם נוספת ונבדוק האם איפשהו ערך של D_{ij} קטן ממש. אם כן, יש מעגל שלילי, אחרת אין (הוכחה כמו ב- BF),

   הדרך הטובה יותר, היא לבדוק אחרי שמבצעים בחלוקה $|V|-1$, אם יש באלכסון משהו שלילי (כלומר קיים i כך ש- $D_{ii}<0$). אם כן, יש מעגל שלילי, אחרת אין.

2. המטריצה π מתעדכנת כך: אחרי צעד של "הכפל", אם $D'_{ij}<D_{ij}$ נקח גם אותו K שנתן את הערך המינימלי החדש ל- D'_{ij} ונשים את π_{ij}.

3. בעצם כל הסיפור עם כפל מטריצות אומר Extend-Shortest-Paths$(D^{(1)},D^{(2)})$,
   מאריכה מסלולים   מקצרת מסלולים

   $$\min_k\{D^{(1)}_{ik}+D^{(2)}_{kj}\} \ldots$$

   ואם $D^{(1)}=D^{(2)}$ זה בעצם אני מנסים כל דרך מסלולים באורך מקסימום כפול ממה שניסיתי קודם.

4. בגרסה המהירה, לעדכון π מתבצע כאשר $D'_{ij}=\min\{D_{ik}+D_{kj}\}<D_{ij}$ נעדכן את ה-K שהביא למינימום $\pi_{ij}\leftarrow\pi_{kj}$.

5. אין צורך לזכור עותקים חדשים של D:

   א) באופן אינטואיטיבי מספיקים שני עותקים כי כל איטרציה חדשה משתמשת בעותק אחד.

   ב) מספיק עותק אחד כי