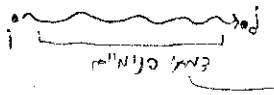
אלגוריתם של Floyd-Warshall

מספרים את הקודקודים בסדר שרירותי $1, 2, 3, \dots, n=|V|$

נניח שבין הקודקוד המקסימלי הוא k



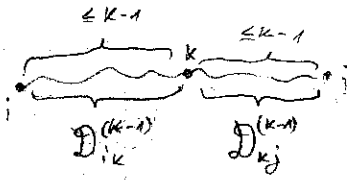
ואז נניח שהמקב הוא בגובה k.

נבנה מקבים לפי גובה עולה. כלומר, לכל i,j נחשב את אורך המסלול הקצר ביותר מ i ל- j בגובה $\le k$. ונעשה זאת לפי k עולה. $(k=0,1,2,\dots)$.

סוף $(k=n)$ נקבל את כל המקבים. ($k=n$ משמעותו שאין כל אילוץ).

$D_{ij}^{(k)}$ - אורך המסלול הקצר ביותר מ- i ל- j בגובה $\le k$. לכן $D^{(0)}=W$, (מסלולים ללא פנימיים)

נבנה את $D^{(k)}$ מתוך $D^{(k-1)}$: $D_{ij}^{(k)}$ שווה ל- $D_{ij}^{(k)}$ אז אורך מינימלי של מסלול מ- i ל- j עובר דרך k ושאר הפנימיים $\le k-1$.



כלומר $D_{ij}^{(k)} = \min\left(D_{ij}^{(k-1)}, D_{ik}^{(k-1)} + D_{kj}^{(k-1)}\right)$

זמן ריצה $O(|V|^3)$.

האלגוריתם הוא דוגמה לשיטה שנקראת בנית דינאמי Dynamic programing.

אלגוריתם של Johnson

אם המשקלות היו כולם אי שליליים, יכולנו להריץ את דיקסטרה מכל קודקוד כדוגמת התגלה וזשלה $O(|V|^2\log|V| + |V||E|)$.

האלגוריתם של גונסון הופך את המשקלות לאי שליליים ואז מריץ את דיקסטרה V פעמים. דרוש לתשוב איך לשנות את המשקלות כך שמסלולים שבעבר היו הכי קצרים ושארו עדיין הכי קצרים. לשם כך נדרש לזה.

טענה: תהא h פונקציה כלשהי על הקודקודים $h: V \to R$. ונגדיר משקלות חדשים כך ש- $w^*(u,v) = w(u,v) + h(u) - h(v)$ לכל קשת (u,v) אז מקב אחת w $\Leftrightarrow$ מקב תחת w^*.

הוכחה: נקח מסלול π כלשהו $v_1, v_2, \dots, v_k$. המשקל של המסלול הוא מצא:

$$w(\pi) = w(v_1, v_2) + w(v_2, v_3) + \dots + w(v_{k-1}, v_k)$$

והמשקל החדש:

$$\begin{aligned} w^*(\pi) &= w(v_1, v_2) + h(v_1) - h(v_2) \\ &+ w(v_2, v_3) + h(v_2) - h(v_3) \\ &\vdots \\ &+ w(v_{k-1}, v_k) + h(v_{k-1}) - h(v_k) = w(\pi) + h(v_1) - h(v_k) \end{aligned}$$

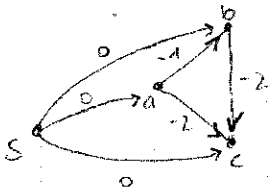
התוספת שנוספה למשקל המסלול זהה עבור כל המסלולים מ- v_1 ל- v_k.

u.multinet.co.il

הרעיון הבא: לבנות פונקציה h כך ש- $w^* \geq 0$ תמיד.

נבנה גרף חדש G': נוסף קודקוד חדש s כקודקוד התחלה ונוסף את כל הקשתות מ- s לכל הקודקודים ב- V. ולכולן משקל 0.

נריץ BF על G' החל מ- s ונקרא את $h(v)$ להיות $h(v)=\delta(s,v)$.



$\delta(s,a)=0=h(a) \Rightarrow w(a,b)=0$

$\delta(s,b)=-1=h(b) \quad w(b,c)=0$

$\delta(s,c)=-3=h(c) \quad w(a,c)=1$

(*) נשים לב שאם כל המשקלות הישנים היו ≥ 0 אז $h \equiv 0$.

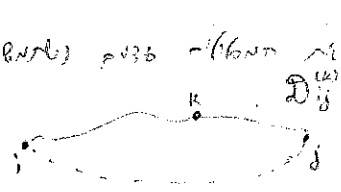
<u>נראה שאם h כזו $w^* \geq 0$</u>: לכל קשת (u,v) מתקיים $w^*(u,v)=w(u,v)+h(u)-h(v)\geq 0$
כלומר $w(u,v)+\delta(s,u)\geq\delta(s,v)$. זה נכון לפי אי שוויון המשולש.

<u>הערה</u>: האלג' של גונסון, משתמש בדיוק בכל פ' הרשומות שבנינו (בגלל BF ודיקסטרה).

<u>הערות לגבי פיתוח ורשל</u>

1) <u>לגבי</u> - עקרונות האלגוריתם מוגדר מחדש מטריצות $D^{(0)}, D^{(1)}, \ldots$ בפעם מספקות ב מטריצות, ובעזרה מסמנים מטריצה אחת, בתנאי שכל ערך חדש שמושגן לא יפגע $d_{ij}^{(k)}$ יהפוך לפחות ה $d_{ij}^{(k)}$ קודמו.

2) האלגוריתם מחשב רק את <u>עצי המסלול</u> אם רוצים לדעת את המסלולים עצמם נשתמש במטריצה Π. $d_{ij}^{(k)}=\min\{d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k-1)}+d_{kj}^{(k-1)}\}$

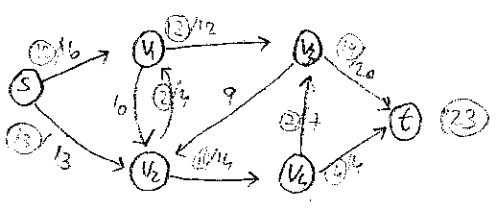


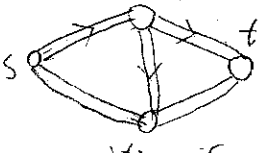
אם הערך שינה $\pi_{ij}^{(k)} \leftarrow \pi_{kj}^{(k-1)}$

אחרת $\pi_{ij}^{(k)} \leftarrow \pi_{ij}^{(k-1)}$

<u>בעיית הזרימה ברשתות</u> Network Flow

<u>דוגמא:</u>





capacity קיבול

(*) הגמישות מאפשר לחתוך ולנסות לשנות כמה שיותר מעל לחתך.

u.multinet.co.il

רשת זרימה: Flow Network

גרף מכוון $G=(V,E)$ עם קודקוד מקור s, וקודקוד t הנקרא בור. הקשת (u,v) בעלת קיבולת $c(u,v)$. בגרפים סתם, אם (u,v) אינה קשת, הקשת נוצרת להגדיר כי $c(u,v)=0$.

בפועל, רק קשתות של E והגנסי קשתות יצא להתייחס.

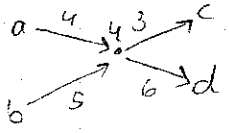
מניחים שכל קודקוד נמצא מ-s ומ-t נגיע מכל קודקוד (אחרת אלגוריתם הם חסרי תועלת). בפרט G (הלא מכוון) קשיר ו- $[|E|\geq|V|-1]$.

זרימה Flow

הוא פונקציה f על הקשתות $f(u,v)$: $f: V\times V\to\mathbb{R}$ מוגדרת לכל זוג קודקודים (גם בפועל מסננת רק חלק הקשתות והגנסי קשתות, f תקבל תמיד ערכים השונים מ-0 רק על קשתות וגנסי קשתות).

זרימה חוקית מקיימת

1) אילוצי קיבול $f(u,v)\leq c(u,v)$ לכל (u,v).
2) שמירה סימטרית $f(u,v)=-f(v,u)$ לכל (u,v).
3) שימור הזרימה; לכל קודקוד $u\neq s,t$ $\sum_v f(u,v)=0$.



$f(u,a)+f(u,b)+f(u,c)-f(u,d)=0$
$-4 \quad -5 \quad 3 \quad 6$

הערות:

1) $f(u,u)=0$ לכל u בגלל הגנסי סימטרי.

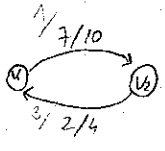
2) אם (u,v) אינה קשת ואינה אינטי קשת אז $f(u,v)=0$ כי אז

$$f(u,v)=0 \Leftarrow \begin{cases} f(u,v)\leq c(u,v)=0 \\ -f(u,v)=f(v,u)\leq c(v,u)=0 \end{cases}$$

ערך זרימה f, נסמן $|f|$ הוא סכום הזרימה היוצאת מ-s.

$$|f|=\sum_{v\in V} f(s,v)$$

המטרה: לחשב זרימה חוקית עם ערך מקסימלי.



$f(v_1,v_2)=5$
$f(v_2,v_1)=-5$

לגרפים בקשתות אינטי מקבילות: במקרים כאלה ניקח את הזרימה הגסקטיבית מ- v_1 ל- v_2 (5 בדוגמה)

סימון מקוצר

$$f(A,B)=\sum_{u\in A,\ v\in B} f(u,v)$$

$A,B\subseteq V$ תתי קבוצות.

f כלשהי זרימה, כלומר

חוק שימור הזרימה: $\forall u \neq s,t.\ f(\{u\},V) \underset{\text{נסמן}}{=} f(u,V) = 0$

(*) לכל קבוצות X ו Y, f זרימה (חלקית) מתקיים $f(X,Y) = -f(Y,X)$.

הוכחה: מתקיים מד"מ מסמטריה

$$f(X,Y) = \sum_{\substack{u\in X\\ v\in Y}} f(u,v) = -\sum f(v,u) = -f(Y,X)$$

(*) אם X,Y זרות $f(X\cup Y, Z) = f(X,Z) + f(Y,Z)$

$$f(Z, X\cup Y) = f(Z,X) + f(Z,Y)$$

הגדרה: נגדיר $|f| = f(s,V)$ (מה שיוצא מ-s)

$|f| = f(V,t)$ (לפי הגדרה)

$V' = \{t\} \cup (V/\{t\})$

$$= f(V,V) = f(V',t) + f(V, V/\{t\})$$

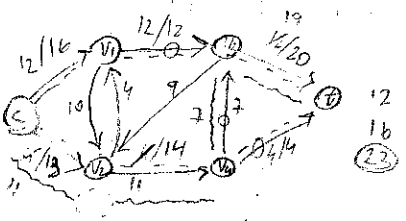
$$|f| = -f(V, V\setminus\{t\}) = f(\underbrace{V/\{t\}}_{\{s\}\cup[V/\{s,t\}]}, V) =$$

$$= f(s,V) + \underbrace{f(V/\{s,t\}, V)}_{=0}$$

$\sum_{u\in V/\{s,t\}} f(u,V) = 0$ לפי שימור הזרימה

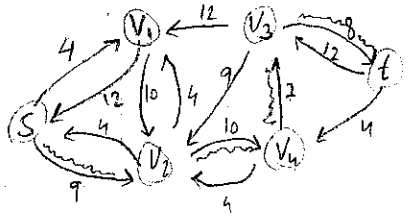
השיטה של Ford-Fulkerson

אתחול: $f(u,v)=0$ לכל (u,v)



G ע"ד קיים מסלול משפר (augmenting path), (לגבי) את f ע"י הגדלה נוספת לאורך המסלול.

כדי למצוא מסלול משפר, נגדיר מושג חדש: הרשת השיורית Residual Network.
עבור רשת זרימה G עם מקור קבוע s ו t יכול עבור זרימה חוקית f.
נסמן G_f. הרעיון V. הקשתות הן אלו ב-E אך אינן קשתות.
לכל קשת (u,v) נגדיר קיבול שיורי $c_f(u,v) = c(u,v) - f(u,v)$



דוגמא: $c_f(s,v_1) = c(s,v_1) - f(s,v_1) = 16-12 = 4$
$c_f(v_1,s) = c(v_1,s) - f(v_1,s) = 0-(-12) = 12$

מסלול משפר - הוא מסלול מ-s ל-t ב-G_f.

קשתות עם קיבול שווה 0 אינן מופיעות ב-G_f.

אם P מסלול משפר נסמן ב-$c_f(P)$ את הקיבול המינימלי של קשת של P = קיבול שיורי של P.
אם P מסלול משפר שקיבולו השיורי $c_f(P)$ נגדיר לכל P זרימה נוספת בגודל $c_f(P)$ ע"י $f^*(u,v) = \begin{cases} f(u,v) & (u,v)\notin P \\ f(u,v) + c_f(P) & (u,v)\in P \end{cases}$ זרימה חדשה

תוספת לזרימה של הקשת P

u.multinet.co.il