אלגוריתמים – הרצאה 07

אלג' של דייקסטרה

מניח שכל המשקלות אי-שליליים.
משתמש בתור עדיפות בשם Q, S היא קב' הצמתים שכבר הוצאנו מהתור ושעבורם כבר חשבנו את $\delta(s,v)$.

התור מנוהל לפי $d(\,)$ המפתח.

אחרי שמוציאים מ-Q את הצומת המינימלי u מבצעים *RELAX* על כל שכניו v.

1. אם $v \notin Q$ אין צורך ב-*RELAX* ואין לו השפעה.
2. אם $v \in Q$ זה גורר פעולת *Decrease_key(v)*.

זמן ריצה

פעולות על Q + $O(|V|+|E|)$
$|V|$ פעולות *Extract_min*
$\geq |E|$ פעולות *Decrease_key*

בערימה רגילה זמן הריצה יהיה $O\big((|E|+|V|)\,log|V|\big)$
בערימת פיבונצ'י $O(|V|\,log|V|+|E|)$

נכונות

<u>טענה:</u> כאשר מוציאים צומת u מהתור מתקיים $d(u)=\delta(s,u)$

<u>הוכחה:</u>
באינדוקציה על סדר הוצאת הצמתים מ-Q.
הראשון שיוצא הוא s: $d(s)=0=\delta(s,s)$ כנדרש.
נניח נכונות עד להוצאת צומת v ונסתכל מה קורה כאשר v יוצא מ-Q. נניח v נגיש מ-s אחרת $d(v)=0=\delta(s,s)$.

נסתכל על מק"ב מ-s אל v.
נשתמש בקב' S של הצמתים שכבר יצאו מ-Q.
v עדיין לא ב-S, אבל s כן.
נעקוב אחרי המק"ב עד הצומת הראשון מחוץ ל-S. יכול להיות v עצמו אבל אולי לא, נסמנו ב-u ואת קודמו x.

ולכן כאשר x יצא מ-Q אז $d(x)=\delta(s,x)$. אז התבצע *RELAX* על הקשת *(x,u)*. אז אחריו התקיים:

$$d(u)\leq d(x)+w(x,u)=\delta(s,x)+w(x,u)=\delta(s,u)$$

אבל תמיד נכון ההפך ולכן שיוויון, כלומר $d(u)=\delta(s,u)$.

אבל v יצא מ-Q לפני u ולכן $d(v)\leq d(u)$.

$$\delta(s,v)\leq d(v)\leq d(u)=\delta(s,u)$$

כאשר $\delta(s,v) = \delta(s,u) +$ (אורך המק"ב בין u ל- v).

כמו כן (אורך המק"ב בין u ל- v) הוא אי-שלילי כי כל המשקולות אי שליליים.

ולכן הכל שיוויון.

All-pairs Shortest Path מק"בים בין כל זוגות הצמתים

גדל הפלט המינימלי $\Theta(|V|^2)$

פתרונות נאיביים

נניח שיש משקלות שליליים (אבל לא מעגלים שליליים).
נריץ בלמן – פורד $|V|$ פעמים, כל פעם עם צומת אחר בתפקיד s צומת התחלה.

זמן הריצה יכול להגיע ל-$O(|V|^4)$, באופן כללי $O(|V|^2|E|)$

אם כל המשקולות אי שליליים, נריץ את *Dijkstra* $|V|$ פעמים
במקרה זה הסיבוכיות היא $O\big(|V|(|V|\log|V| + |E|)\big)$ או $O(|V|^2\log|V| + |V|\cdot|E|)$. $O(|V|^3)$ לכל היותר.

ייצוג

במקרה זה נשתמש בהצגת הגרף ע"י מטריצת שכנויות וגם את הפלט נייצג בצורה מטריציאלית

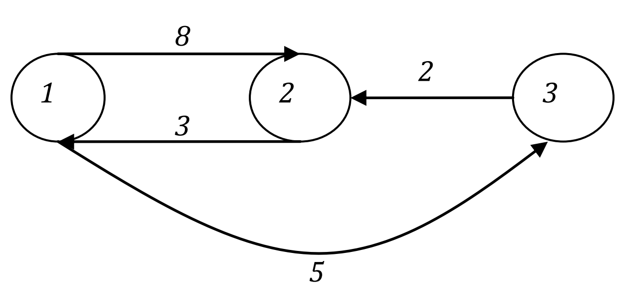
בעצם, ייצוג הגרף יהיה ע"י מטריצה W.

ניתן לצמתים מס' סידוריים.

$$\underset{1}{v_1}, \underset{2}{v_2}, \underset{3}{v_3}, \ldots, \underset{n}{v_n}$$

$$W_{ij} = \begin{cases} 0 & i = j \\ \infty & (i,j) \notin E \\ W(i,j) & (i,j) \in E \end{cases}$$

למשל עבור



המטריצה המתאימה היא:

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 5 \\ 3 & 0 & \infty \\ \infty & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>מטריצה D</u>

D_{ij} מייצג את אורך מסלול מ-i ל-j הקצר ביותר שהתגלה עד כה.

<u>אתחול:</u> $D \longleftarrow W$

<u>מטריצה Π של מצביעים</u>

Π_{ij} מחזיק מצביע לצומת הקודם ל-j במסלול הטוב ביותר שהתגלה עד עתה מ-i.

<u>אתחול:</u>

$$\Pi_{ij} = \begin{cases} NIL & i = j \\ NIL & W_{ij} = \infty \\ i & W_{ij} < \infty \end{cases}$$

אלג' ראשון

מחקה את בלמן-פורד באופן מטריציאלי.

$RELAX$ יתבצע באופן הבא:

נבצע בבת אחת לכל הקשתות שנכנסות ל-j (נשנה את k) : $min\left\{ \underbrace{D_{ij}}_{=D_{ij}+W_{jj}}, D_{ik} + W_{kj} \right\}$

$$D_{ij}` \leftarrow \min_{1 \le k \le n} \{D_{ik} + W_{kj}\} \ \forall i, j$$

זהו בעצם צעד אחד של בלמן-פורד .

אם אין מעגלים שליליים אנו זקוקים ל-$|V| - 1$ איטרציות ואמנם נבצע $|V| - 1$.

ננסה לשכתב את הביטוי הקודם כאילו כתוב:

$$D_{ij}` \leftarrow \sum_{k=1}^{n} \{D_{ik} * W_{kj}\} \ \forall i, j$$

זה בעצם כפל מטריצות:

$$\underline{(D` = D \circ W)}$$
$$D^{(1)} = W$$
$$D^{(2)} = W \circ W$$
$$D^{(3)} = W \circ W \circ W$$
$$\vdots$$

למשל, עבור הדוגמא הקודמת נקבל:

$$\begin{pmatrix} 0 & 8 & 5 \\ 3 & 0 & \infty \\ \infty & 2 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 & 8 & 5 \\ 3 & 0 & \infty \\ \infty & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 5 \\ 3 & 0 & 8 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

זמן ריצה

$O(|V|^3) = O(n^3)$ לאיטרציה אחת, ובסה"כ $O(|V| \cdot |V|^3) = O(|V|^4)$

ניתן לייעל את כפל המטריצות – אם רוצים לחשב את W^{n-1}, אז ניתן למשל לעשות $w^8 = ((w^2)^2)^2$

$$\left(\left(\left(\left(\left(\left((W \circ W) \circ W\right) \circ W\right) \circ W\right) \circ W\right) \circ W\right) \circ W\right) = \left((W \circ W) \circ (W \circ W)\right) \circ \left((W \circ W) \circ (W \circ W)\right)$$

ניתן לבצע זאת כי כפל מטריצות אסוציאטיבי.

<u>הערה:</u>
בלמן פורד מפעיל $|V| - 1$ איטרציות ואנחנו רק $|V| - 2$ כי האתחול שלנו הוא כמו איטרציה ראשונה של בלמן-פורד.

במקרה המשופר זמן הריצה הוא $O(|V|^3\, log|V|)$

הערות

1. אם יש <u>מעגלים שליליים</u>, נגלה אותם "בלי לחשוב" כמו בלמן-פורד, נכפיל פעם נוספת, ונבדוק אם איזשהו ערך קטן ממש.
   אם כן, יש מעגל שלילי, ואם לא אז אין.
   בצורה יותר חכמה, ניתן לבדוק אחרי שמעלים בחזקה $|V| - 1$ אם יש באלכסון מישהו שלילי $D_{ij} < 0$.
   אם כן, יש מעגל שלילי, ואם לא, אז אין.
2. <u>המטריצה Π</u> מתעדכנת כך:
   אחרי צעד של "הכפל" אם $D_{ij}` < D_{ij}$ נקח אותו $k$ שנתן את הערך המינימלי החדש ל $D`_{ij}$ ונשים $\Pi_{ij} \leftarrow k$.
3. בעצם כל הסיפור עם כפל מטריצות מיותר
   $$EXTEND\_SH\_PATHS\left(\underbrace{D^{(1)}}_{\text{מקודדת מסלולים}}, \underbrace{D^{(2)}}_{\text{מקודדת מסלולים}}\right)$$
   אז $min_k \left\{D_{ik}^{(1)} + D_{kj}^{(2)}\right\}$ - הצעה למסלול טוב ביותר ש-$D^{(1)}, D^{(2)}$ נותנות.
   ואם $D^{(1)} = D^{(2)}$ אז בעצם אנו מנסים בכל צעד מסלולים באורך מקסימום כפול ממה שניסינו קודם
4. בגרסה המהירה עדכון Π מתבצע: כאשר
   $$D`_{ij} = min\left\{D_{ik} + D_{kj}\right\} < D_{ij}$$
   נמצא את ה-k שהביא למינימום את $\Pi_{ij}` \leftarrow \Pi_{kj}$.
5. אין צורך ליצור עותקים חדשים של D.
   a. באופן נאיבי מספיקים שניים.
      כל תוצאה חדשה מושמת בעותק האחר.
   b. מספיק עותק אחד.