תרגול מספר 3

משתנים ופונקציות לוגיים

- **משתנים לוגיים/בולאניים**
  - מסומנים כמשתנים 'רגילים' - x,y,z
  - יכולים לקבל אחד משני ערכים - True/False
  - מקצרים ומשתמשים ב - 1/0.
  - למה ? אין/יש זרם כאשר משתנה מתאר חוט חשמלי.
- **פונקציות לוגיות**
  - מסומנות: (... ,משתנה לוגי,משתנה לוגי)*f*, לדוגמא: *f*(x,y,z)
  - התנהגות פונקציה מתוארת על ידי ***טבלת אמת***.
  - הטבלה מפרטת מתי הפונקציה מקבלת 0 או 1 על פי ערכי הארגומנטים שלה.

טבלאות אמת

- דוגמאות:

X	Y	F(X,Y)
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

X	Y	Z	F(X,Y,Z)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

מספר השורה ביט ערכים של המשתנים הבוליאניים

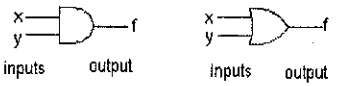
שערים לוגיים

- אבני הבניין לתיאור פורמלי של פונקציות בוליאניות.

X	Y	F=XY	F=X+Y
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

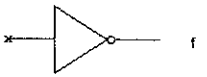
AND $f = x \bullet y$, $f = xy$, $f = x^{\wedge}y$, $f = x \text{ AND } y$

OR $f = x + y$, $f = x \vee y$, $f = x \text{ OR } y$



X	F=X'
0	1
1	0

NOT f=x'



הצגה פורמלית של פונקציות בוליאניות

- Product of sums

מתארים את הפונקציה על פי המקרים שבהם היא 0.

X	Y	Z	F	#
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	1	2
0	1	1	1	3
1	0	0	1	4
1	0	1	0	5
1	1	0	1	6
1	1	1	0	7

$$F = PROD(0,1,5,7) = \prod (0,1,5,7) =$$
$$(X+Y+Z)\cdot(X+Y+Z')\cdot$$
$$(X'+Y+Z')\cdot(X'+Y'+Z') =$$
$$(X+Y+Z)\cdot(X+Y+\overline{Z})\cdot$$
$$(\overline{X}+Y+\overline{Z})\cdot(\overline{X}+\overline{Y}+\overline{Z})$$

הצגה קנונית של פונקציות בוליאניות

- Sum of products

מתארים את הפונקציה על פי המקרים שבהם היא 1.

X	Y	Z	F	#
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	1	2
0	1	1	1	3
1	0	0	1	4
1	0	1	0	5
1	1	0	1	6
1	1	1	0	7

- מסמנים:

$$F = SUM(2,3,4,6) = \sum (2,3,4,6) =$$
$$X'YZ' + X'YZ + XY'Z' + XYZ' =$$
$$\overline{X}Y\overline{Z} + \overline{X}YZ + X\overline{Y}\overline{Z} + XY\overline{Z}$$

פישוט פונקציות

- **המטרה**: להגיע למספר מינימלי של ליטרלים תוך שימוש במשפטי האלגברה הבוליאנית וכללי דה-מורגן. ליטרל הוא משתנה או המשלים שלו (x ו-x' הם ליטרלים שונים).

(*) מספר ליטרלים חיסכון עלות רכיבים הטרנזיסטורים

- כללי דה-מורגן:

$$\overline{X \times Y} = \overline{X} + \overline{Y}$$
$$\overline{X + Y} = \overline{X} \times \overline{Y}$$

משפטי אלגברה בוליאנית

$\overline{\overline{X}} = X$

$X+0=X$	$X\times 1=X$
$X+1=1$	$X\times 0=0$
$X+X=X$	$X\times X=X$
$X+\overline{X}=1$	$X\times\overline{X}=0$
$X+XY=X$	$X(X+Y)=X$
$XY+X\overline{Y}=X$	$(X+Y)(X+\overline{Y})=X$
$X+\overline{X}Y=X+Y$	$X(\overline{X}+Y)=XY$

$X+YZ=(X+Y)(X+Z)$

$X(Y+Z)=XY+XZ$

$XY+\overline{X}Z=(X+Z)(\overline{X}+Y)$

$XY+\overline{X}Z+YZ=XY+\overline{X}Z$

$(X+Y)(\overline{X}+Z)(Y+Z)=(X+Y)(\overline{X}+Z)$

הוכחת זהויות

■ הוכח ש:

$x'y'z'+x'y'z+x'yz'+xy'z'+xy'z = y'+x'z'$

הוכחה:

$\boxed{x+x=x}$

$el = x'y'z'+x'y'z+x'yz'+xy'z'+xy'z =$

$x'y'z'+x'y'z+x'yz'+xy'z'+ x'y'z' + xy'z =$

$x'y'(z'+z)+xy'(z'+z)+x'z'(y'+y) =$

$x'y'+xy'+x'z' = y'(x'+x)+x'z' =$

$\mathbf{y'+x'z'}$ ■

פישוט פונקציות

מצא ופשט את המשלים של הביטוי $(xy'+wz')(wx'+yz')$:

$[(xy'+wz')(wx'+yz')]' = (xy'+wz')'+(wx'+yz')' =$

$(xy')'(wz')' + (wx')'(yz')' =$

$(x'+y)(w'+z) + (w'+x)(y'+z) =$

$x'w'+x'z +yw'+yz+w'y'+w'z+xy'+xz =$

$z+w'+x'w'+yz+w'z+xy'=$

$z+w'+x'w'+yz+w'z+xy'=$

$z+w'+w'z+xy' = z+w'+w'z+xy'=$

$\mathbf{z+w'+xy'}$

מערכות אוניברסליות

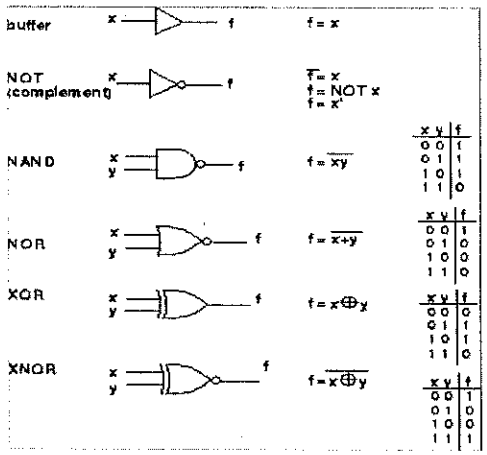
- בעזרת הפונקציות AND, OR, NOT ניתן לייצג כל פונקציה בינרית.
- *מערכת אוניברסלית* הינה אוסף פונקציות שמהווה בסיס חלופי לייצוג פונקציות בינריות.
- כיצד מוכיחים שאוסף מהווה בסיס ?

שתי אפשרויות:

א. להביע את AND, OR, NOT בעזרת קומבינציה מהאוסף הנבחן. **או**

ב. להביע בסיס ידוע אחר בעזרת קומבינציה מהאוסף הנבחן לדוגמא NAND. גם NOR מהווה בסיס (יילמדו בהרצאה).

שערי NAND, NOR, XOR



מערכות אוניברסליות

- דוגמא: הוכח ש {f,0} מהווה מערכת אוניברסלית באשר

f(x,y)=x'+y

פתרון:

נביע את NAND בעזרת {f,0} :

f(x,f(y,0)) = x' + f(y,0) = x' + y' + 0 = (xy)'

האינטואיציה: נשים לב לכך ש- x'+y דומה בצורתו ל- x'+y' שזה לפי כללי דה-מורגן NAND לכן צריך ליצר את NOT. ואת זאת ניתן לקבל מ: f(y,0)

מערכות אוניברסליות

- דוגמא: הוכח ש {f,1} מהווה מערכת אוניברסלית באשר

f(x,y,z)=x'y'+x'z'+y'z'

פתרון:

נביע את NOR בעזרת {f,1} :

f(x,y,1) = x'y'+x'1'+y'1' = (x+y)'+x'0+y'0 = (x+y)'

האינטואיציה: x'y' לפי כללי דה-מורגן זה NOR לכן צריך לאפס את שני המחוברים האחרונים ב-f.

מערכות אוניברסליות

- דוגמא: הוכח ש {f,0} מהווה מערכת אוניברסלית באשר

f(x,y)=x'+y

פתרון:

נביע את NAND בעזרת {f,0} :

f(x,f(y,0)) = x' + f(y,0) = x' + y' + 0 = (xy)'

האינטואיציה: נשים לב לכך ש- x'+y דומה בצורתו ל- x'+y' שזה לפי כללי דה-מורגן NAND לכן צריך ליצר את NOT. ואת זאת ניתן לקבל מ: f(y,0)

מערכות אוניברסליות

- <u>דוגמא:</u>

הוכח ש NAND מהווה מערכת אוניברסלית

<u>פתרון:</u>

נביע בעזרת NAND את OR,AND ו NOT :

$$NAND: f(x,y) = \overline{xy}$$

$$NOT: \overline{x} = \overline{xx} = f(x,x)$$

$$OR: x+y = \overline{\overline{x}+\overline{y}} = \overline{\overline{x}\,\overline{y}} = f(\overline{x},\overline{y}) = f(f(x,x), f(y,y))$$

$$AND: xy = \overline{\overline{xy}} = \overline{\overline{xy}\,\overline{xy}} = f(f(x,y), f(x,y))$$

מערכות אוניברסליות

- ב.

f1(x,y,z) = sum(0,2,4,6,7) = צמצום

$x'y'z'+x'yz'+xy'z'+xyz'+xyz =$

$x'z'+xy+xy'z' = x'z'+x(y+y'z') =$

$x'z'+x(y+z') =$

$x'z' + xy + xz' = xy+z' =$

f3(f2(x,f3(f2(y,y),y)) , z)