חדוא 2 - הרצאה 10 5/6/08

$\mathbb{C}$ גזירות של טורי חזקות

יהיה רדיוס ההתכנסות של $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ $R>0$

(כלו' $\frac{1}{R}=\overline{\lim}|a_n|^{\frac{1}{n}}<\infty$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ מתכנס עבור $z\in B(R)$)

אזי:

(i) רדיוס ההתכנסות של $g(z):=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ הינו גם R

(ii) f $\mathbb{C}$-גזירה על $B(R)$ ו- $f'(z)=g(z)$.

<u>הוכחה של (i)</u> (תזכ') $n^{\frac{1}{n-1}}\xrightarrow{n\to\infty}1$ $|na_n|^{\frac{1}{n-1}}=n^{\frac{1}{n-1}}|a_n|^{\frac{1}{n-1}}$

$$\overline{\lim}|a_n|^{\frac{1}{n-1}}=R$$

$$\frac{1}{n_k}\log|a_{n_k}|\longrightarrow\log R$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{1}{n_k-1}\log|a_{n_k}|\longrightarrow\log R$$

יהי רדיוס ההתכנסות של $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$. $R>0$.

זכרנו אומרת כי $\frac{1}{R}=\overline{\lim}\,|a_n|^{\frac{1}{n}}$ ואז $\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ מתכנס לכל $z\in B(R)$
($B(R)$ נקרא כדור ההתכנסות או כדור ...)

אזי:

(1) רדיוס ההתכנסות של $g(z):=\sum_{n=1}^{\infty}n a_n z^{n-1}$ הוא גם R

(2) f, גזירה על $B(R)$ ואז $f'(z)=g(z)$

זה נכון גם עבור g שהיא נגזרת של f' וכו' ועבור נגזרת n פעמים נקבל $a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

הוכחה-

(1) נשים לב כי $|n a_n|^{\frac{1}{n-1}}=n^{\frac{1}{n-1}}|a_n|^{\frac{1}{n-1}}$ ואז נשים לב כי $n^{\frac{1}{n-1}}\xrightarrow[n\to\infty]{}1$

ואז $n^{\frac{1}{n-1}}|a_n|^{\frac{1}{n-1}}\xrightarrow[n\to\infty]{}R$ (כי $n^{\frac{1}{n-1}}\xrightarrow[n\to\infty]{}1$ וגם $|a_n|^{\frac{1}{n-1}}\xrightarrow[n\to\infty]{}R$

מוגדרת על R, הגבול כאשר $n\to\infty$ הוא 1 לכן זה מתכנס לאותו גבול (…).

מסקנה - רדיוס ההתכנסות הוא אותו רדיוס ההתכנסות לא משנה כמה פעמים גוזרים את טור החזקות.

(2) נקבע $x\in B(R)$ נוכיח כי $g(x)\xleftarrow[\substack{y\to x\\ y\neq x\\ y\in B(R)}]{}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$

מתחילים עם פולינום (כלומר מספר ה $a_n\neq 0$ סופי) זה נובע כמו שהוכחנו כבר זה.

אזי $f(z)=\sum_{n=0}^{N}a_n z^n=a_0+\sum_{n=1}^{N}a_n z^n$

אזי $f'(z)=\sum_{n=1}^{N}a_n\cdot n\cdot z^{n-1}=g(z)$

אם f אינו פולינום אז נקבע $|x|<r<R$

__טענת עזר 1__ -

יהי $|y|<r$, $y\neq x$ אזי $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sum_{k=1}^{n-1}y^k x^{n-k-1}$ מתכנס בהחלט וגם מתקיים

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sum_{k=1}^{n-1}y^k x^{n-1-k}=\frac{y^n-x^n}{y-x}$$ (מהגדרה של הפולינום/נוסחה:)

הוכחה -

נוכיח התכנסות בהחלט - $\left|a_n\sum_{k=1}^{n-1}y^k x^{n-1-k}\right|\le|a_n|\sum_{k=1}^{n-1}|y^k||x^{n-1-k}|\le$

מקיימת r היא ש $|x|<r$ וגם $|y|<r$ לכן שני האיברים

$\le|a_n|\sum_{k=1}^{n-1}r^k\cdot r^{n-k-1}=|a_n|\sum_{k=1}^{n-1}r^{n-1}=n|a_n|r^{n-1}$

וזה מתכנס משום ש $r<R$

לכן הטור מתוך רדיוס ההתכנסות ולכן $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sum_{k=1}^{n-1}x^{n-1-k}y^k$ מתכנס בהחלט.

נראה את הנוסחה: $\frac{f(y)-f(x)}{y-x}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sum_{k=1}^{n-1}y^k x^{n-k-1}$

מהגדרה של גבול:

$$\frac{\sum_{k=0}^{n}a_k y^k-\sum_{k=0}^{n}a_k x^k}{y-x}\xrightarrow[x\to y]{}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

$$\frac{\sum_{k=0}^{n}a_k y^k-\sum_{k=0}^{n}a_k x^k}{y-x}=\sum_{k=0}^{N}a_k\frac{(y^k-x^k)}{y-x}=\sum_{n=1}^{N}a_n\sum_{k=0}^{n-1}y^k x^{n-1-k}$$

$$\xrightarrow[N\to\infty]{}\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sum_{k=0}^{n-1}y^k x^{n-k-1}$$

וזה טור שהראינו שהוא מתכנס בהחלט.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-k-1} \xrightarrow[y\in B(R)]{y\to x} g(x)$$

המסקנה הטורים אין לנו מזה | ובגלל זה מתכנס $g(x)$ ומזה (לא) טור ח-ח זמלים.

הוכחה -

יהי $\varepsilon>0$ קיים טבעי N_ε כך שלכל $N\ge N_\varepsilon$. $\sum_{n=N}^{\infty} n|a_n||x|^{n-1} \le \sum_{n=N}^{\infty} n|a_n| r^{n-1} \le \varepsilon$

לכן $|y|<r$ אז

$$\left|\sum_{n=N}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{n-1} y^k x^{n-k-1}\right| < \sum_{n=N}^{\infty} n a_n r^n < \varepsilon$$

כעת נראה (התכנסות) ל $g(x)$:

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{n-1} y^k x^{n-k-1} - g(x)\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(\sum_{k=0}^{n-1} y^k x^{n-k-1} - n x^{n-1}\right)\right| \le$$

(שהרי $g(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$)

$$\le \left|\sum_{n=1}^{N} a_n\left(\sum_{k=0}^{n-1} y^k x^{n-k-1} - n x^{n-1}\right)\right| + \underbrace{2\sum_{n=N+1}^{\infty} n|a_n| r^{n-1}}$$

יש שני גורמים. באחד כל גורם אחד
שייך לסוף של הטור. והגורם השני
שייך ל g. ושני הגורמים קטנים מ-ε.

קיים $r-|x|>\delta>0$ כך ש $\sum_{n=1}^{N} a_n\left(\sum_{k=0}^{n} y^k x^{n-k-1} - n x^{n-1}\right) < \varepsilon$ עבור $|x-y|<\delta$ (ב y,x)
שמקיימים כאלו - מתקיים הסכום קטן מ-ε

לכן עבור הכל לכל x,y המקיימים $|x-y|<\delta$ נקבל ש-

$$\left|\sum_{n=1}^{N} a_n\left(\sum_{k=0}^{n-1} y^k x^{n-k-1} - n x^{n-1}\right)\right| + 2\varepsilon < 3\varepsilon$$

(כי הראינו שמתקיים
$\sum n|a_n| r^{n-1} < \varepsilon$)

מסקנה

מסקנה: טורי מקלורין Maclurin

נניח כי $f(z)=\sum_{n=0} a_n z^n$. רדיוס ההתכנסות $R>0$ אזי f גזירה ∞ פעמים ב- $B(R)$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \Leftarrow f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!\,a_n}{(n-k)!} z^{n-k}$$

זה $\frac{n!}{n!\cdot k!}$ שווה שכתובים $n(n-1)\dots(n-k) = \frac{n!}{k!}$

ולכן אם נציב (עבור n) אז $\frac{1}{n!} = \frac{n!}{n!\,0!}$.

מסקנה: אינטגרל של טור חזקות

$a_n\in\mathbb{R}$ $\quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n =: f(x)$ מתכנס עבור $|x|<R$ אם $0<x<R$ אז

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1} = \int_0^x f(t)\,dt$$

הוכחה - $g(x)$ מתכנס עבור $\overbrace{R>|x|}^{(\text{מבחן של }x)}$, g גזירה ב- $B(R)$ וכן $g'(x)=f(x)$

וכן $f(x)=\frac{d}{dx}\int^x f(t)\,dt$

משפט ניוטון-לייבניץ

$$\int_0^x f(t)\,dt = g(x) + C$$

$$C = \int_0^0 - g(0) = 0$$

<u>באמצעות [illegible] טורי חזקות מרוכבים</u>

$z\in\mathbb{C}$, $R=\infty$ כי הטור הזה $e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$

כך ניתן להגדיר את זה לכל z מרוכב. אומר הרחבה של הפונקציה המוגדרת e^x לשדה המרוכבים.

באותה צורה ניתן להגדיר הרחבה עבור $\cos , \sin$

וגם כאן עבור $\sin , \cos$ מתקיים $R=\infty$

$$\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

<u>נוסחת אוילר</u>

$$\cos x+i\sin x=e^{ix}$$

נרשום טורי חזקות של שני הצדדים ונקבל:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}=$$

שים לב כי $(i)^{2n}=(-1)^n$

$(i)^{2n+1}=i\cdot(-1)^n$ לכן...

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\cdot x)^{2n}}{(2n)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ix)^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ix)^n}{n!}=e^{ix}$$

$\Leftarrow$ תשובה: נוסחת אוילר -

שימוש לחישוב סכום קשה כמו: $\sum_{k=0}^{n-1}\cos(kx)=Re\left[\sum_{k=0}^{n-1}e^{ikx}\right]=Re\left[\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}}\right]$

הוכחה -

$$e^{z+w}=e^z\cdot e^w$$

$$e^{z+w}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+w)^n}{n!}\underset{\text{נוסחת הבינום}}{=}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}z^k\cdot w^{n-k}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}\cdot\frac{w}{(n}$$

$$\underset{\text{מכפלת קושי}}{=}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{w^l}{l!}\right)=e^z\cdot w^z$$

<u>זהויות נוספות</u>

(א) $\cos z=\frac{1}{2}\left(e^{iz}+e^{-iz}\right)$

(ב) $\sin z=\frac{1}{2i}\left(e^{iz}-e^{-iz}\right)$

(ג) $e^{2\pi}=1$

זה נובע מההגדרה של טריגונומטריות כי e היא טריגונומטרית כי $e^{2\pi}$ יהיה שווה 1 אך אפשר זה חייב להיות טריגונומטרי!

מבחנים להתכנסות במידה שווה

נניח כי $E \subseteq \mathbb{C}$ וכן $a_n : E \to \mathbb{C}$ לכל $n \geq 0$.
$b_n : E \to \mathbb{R}$

(1) מבחן 1: Dirichlet

נניח כי $b_n \geq b_{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ מתכנס במידה שווה על E. (אך צריך שיהיה גם במ"ש)

וכן נניח כי קיים M כך ש $\left|\sum_{k=0}^{N} a_k(t)\right| \leq M$ לכל $N \geq 1$, $t \in E$

<u>אזי:</u> הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot b_n$ מתכנס במ"ש על E.

דוגמא-

$a_n = (-1)^n \qquad b_n = \frac{1}{n^\alpha} \qquad \alpha > 0$

(הרעיון הוא שזה נכון גם מקרים
בהחלט אבל $0<\alpha\leq 1$ לא יתכנס אז
מתכנס בתנאי)

אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ מתכנס לפי מבחן דיריכלה.

(2) מבחן 2: Abel

נניח כי מתקיים (א) $\sup_{t\in E,\, n\geq 1} |b_n(t)| < \infty$ כלומר סופרימום חסום.

(ב) לכל $t \in E$ הסדרה $(b_n(t))_n$ מונוטונית (עולה או יורדת)

(ג) הטור הנתון $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ מתכנס במ"ש על E.

<u>אזי:</u> הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס במ"ש על E.

הלמה של Abel על סכימה בחלקים

יהיו $a_n, b_n \in \mathbb{C}$ וכן נסמן $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ וכן נסמן $A_{-1} = 0$

אזי לכל $0 \leq P \leq Q$ מתקיים השוויון:

$$\sum_{k=P}^{Q} a_k b_k = \sum_{k=P}^{Q-1} A_k (b_k - b_{k+1}) - A_Q b_Q - A_{P-1} b_P$$

הוכחה-

$$\sum_{k=P}^{Q} a_k b_k = \sum_{k=P}^{Q} (A_k - A_{k-1}) b_k = \sum_{k=P}^{Q} A_k \cdot b_k - \sum_{k=P}^{Q} A_{k-1} b_k \underset{\text{החלפת משתנים}}{=}$$

$$= \sum_{k=P}^{Q} A_k b_k - \sum_{j=P-1}^{Q-1} A_j b_{j+1} = \sum_{k=P}^{Q-1} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_Q b_Q - A_{P-1} b_P$$

בעזרת למה זו נוכיח את מבחן Dirichlet.

הוכחת מבחן Dirichlet

נוכיח כי $\sup_E \left(\sum_{k=P}^{Q} a_k b_k \right) \xrightarrow[P\to\infty]{P<Q} 0$

הוכחה-

$$\left| \sum_{k=P}^{Q} a_k b_k \right| \underset{\text{מהלמה}}{=} \left| \sum_{k=P}^{Q-1} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_Q b_Q - A_{P-1} b_P \right| \underset{\text{אי שוויון}}{\leq}$$