12/6/08

חדו"א 2 - הרצאה 11

## קריטריון Abel-Dirichlet (להתכנסות במ"ש)

$a_k, b_k : E \to \mathbb{C}$ , $E \subset \mathbb{R}$

(*) $\sum_k a_k(t) b_k(t)$ , $t \in E$

(A) $\sum a_k(t)$ מתכנס במ"ש ב $E$ , $b_k$ מונוטוני וחסומה ב $E$
$(\sup_{E,k} |B_k| < \infty)$

(D) $\sup_{E,n} \left| \sum_{k=1}^{n} a_k(t) \right| \le C$

$b_k$ מונוטוני ו- $b_n \rightrightarrows 0$ ב $E$

אם (A) או (D) מתקיים $\Rightarrow$ (*) מתכנס במ"ש ב $E$.

למה - Summation by part

$a_k = A_k - A_{k-1}$ , $n \le k \le m$ , $a_k, b_k$ אז

(נוסחת אבל)
$$\sum_{k=n}^{m} a_k b_k = A_m b_m - A_{n-1} b_n - \sum_{k=n}^{m-1} A_k (b_{k+1} - b_k)$$

נוסחה זו דומה מאוד לנוסחה עבור אינטגרל:

$$a = A' \qquad \int_n^m a \cdot b = \int_n^m A' b$$

$$= A(m)b(m) - A(n)b(n) - \int_n^m b' A$$

מסקנה
$$\left| \sum_n^m a_k b_k \right| \le 4 \overbrace{\max_{n-1 \le k \le m} |A_k|}^{X} \cdot \max(|b_n|, |b_m|)$$

הוכחה:
$$\overset{(1)}{\le} |A_m||b_m| + |A_{n-1}||b_n| + \sum_n^{m-1} |A_k||b_{k+1} - b_k| \le$$

$$\le X \left( |b_n| + |b_m| + \sum_n^{m-1} |b_k - b_{k-1}| \right)$$

$b_k$ מונוטוני $\Leftarrow$
$$\sum_n^{m-1} |b_k - b_{k-1}| \underset{\text{לבדוק!}}{=} \left| \sum_n^{m-1} (b_{k+1} - b_k) \right| =$$

$$= |b_m - b_n| \le |b_m| + |b_n|$$
(כמו סכום טלסקופי)

$$\le X(2|b_n| + 2|b_m|) \le 4X \cdot \max(|b_n|, |b_m|) \quad \square$$

הוכחה (A):

יהי $\varepsilon>0$. יש להראות כי $n,m \ge N_\varepsilon \Rightarrow \left|\sum_{n}^{m} a_k(t) b_k(t)\right| < \varepsilon \quad \forall t\in E$

(לפי קריטריון קושי על התכנסות במ"ש נקבל שהטור מתכנס)

לפי המסקנה ⊛ $\left|\sum_{n}^{m} a_k b_k\right| \le 4 \le \underbrace{4\cdot \sup_{k,E}|b_k|}_{\le C}\ \underbrace{\max_{n-1\le k\le m}|A_k|}_{<\varepsilon}$

$a_k = A_k - A_{k-1}$

$A_k = \sum_{l=n-1}^{k} a_l$

$\sum a_l$ מתכנס במ"ש $\Leftarrow$ (c) - קריטריון קושי $\forall t\in E \quad \left|\sum_{n-1}^{k} a_l(t)\right| < \varepsilon$

ולכן: ⊛ $C\varepsilon$

□

דוגמא (לשימוש בקריטריון דיריכלה)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}, \quad x\ge 0$$

(D) נבחר $a_n = (-1)^n$ $\quad \sum_{1}^{N} a_n = \pm 1$

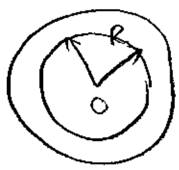
$b_n = \frac{1}{n+x}$ במ"ש $\downarrow\downarrow$ ב-$[0,\infty)$ $n\to\infty$

$\Leftarrow$ הטור מתכנס במ"ש ב-$[0,\infty)$

משפט Abel

$$(*) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_k z^k = f(z)$$

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim}\ \sqrt[n]{|c_n|}$$



משפט Abel: נניח ש- $\infty > R > 0$ ונניח כי (*) מתכנס בנקודה $\zeta$, $R=|\zeta|$. אזי $\lim_{r\uparrow R} f(r\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \zeta^k$

$R=1 \quad \zeta = e^{it}$

נניח ש $\sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{ikt}$ מתכנס ל-$S$

$$\Rightarrow \boxed{S = \lim_{r\uparrow 1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k r^k e^{ikt}}$$

$t=0$ אזי $\sum_{k=0}^{\infty} c_k = S \Leftarrow S = \lim_{r\uparrow 1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k r^k$

דוגמה: $f(x) = \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, \quad R=1$

לייבניץ: אזי $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ מתכנס ל-$S$

אזי $\lim_{x\uparrow 1} f(x) = S = \log 2$. מקבלים:

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

(נסו לראות לא הכלים!)