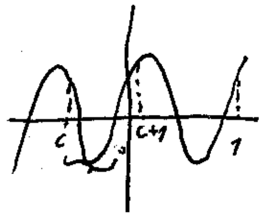
**פונקציות מחזוריות** $C(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$

$=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}\ ,\ f$ רציפה contin... $f(t+1)=f(t)\}$

**טענה:**

$$\int_c^{c+1} f(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt \quad , \quad \forall c\in\mathbb{R}$$

**הוכחה:** $0<c<1$,



$$\int_c^{c+1} f(t)\,dt \overset{\text{אדיטיביות של אינטגרל}}{=} \int_c^1 f(t)\,dt + \int_1^{c+1} f(t)\,dt =$$

החלפת משתנה

$$= \int_c^1 f(t)\,dt + \int_0^c \underbrace{f(t+1)}_{=f(t)\ \text{לפי מחזוריות}}\,dt \overset{\text{אדיטיביות של אינטגרל}}{=} \int_0^1 f \quad \blacksquare$$

**עובדה על הקבוצה שלנו:**

$C(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ מרחב לינארי על $\mathbb{C}$.

**מכפלה סקלרית:**

**הגדרה:** $f,g$ $\quad \langle f,g\rangle \overset{def}{=} \int_0^1 \underbrace{f\bar{g}}_{\text{רציפה}}$ . $\langle\cdot,\cdot\rangle : C(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z})\times C(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z})\to\mathbb{C}$

המכפלה נותנת לנו מספר מרוכב.

**תכונות:**

① $\langle g,f\rangle=\overline{\langle f,g\rangle}$

$$\langle g,f\rangle=\int_0^1 g\cdot\bar{f} = \int_0^1 \overline{f\cdot\bar{g}} = \overline{\left(\int_0^1 f\cdot\bar{g}\right)} = \overline{\langle f,g\rangle}$$

②

$$\langle f+g,h\rangle=\langle f,h\rangle+\langle g,h\rangle \quad , \quad \langle f,g+h\rangle=\langle f,g\rangle+\langle f,h\rangle$$

$c\in\mathbb{C}$

$$\langle cf,g\rangle = c\langle f,g\rangle \quad , \quad \langle f,cg\rangle=\bar{c}\langle f,g\rangle$$

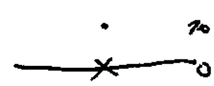
**הגדרה:** **נורמה** (אורך) של $f$

$$\|f\|=\sqrt{\langle f,f\rangle}$$

$$\overbrace{\|\cdot\|}^{\text{נורמה}} : C(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z})\to\mathbb{R}_+$$

③ $\|f\|=0 \iff f\equiv 0$

$\quad \| = \int_0^1 |f|^2 \to$ לפי תרגיל בית 2 או 3, אם האינטגרל מתאפס אז הפונקציה בהכרח אפס (בתנאי רציפות)



④ $\|c\cdot f\| = |c|\cdot\|f\|$

$$\| = \sqrt{\langle cf,cf\rangle}$$

$$=\sqrt{|c|^2\cdot\langle f,f\rangle} = |c|\cdot\|f\|$$

$|\langle f,g\rangle| \le \|f\|\cdot\|g\|$.

הוכחה: $\lambda\in\mathbb{C}$.

$$0\le \langle f-\lambda g, f-\lambda g\rangle =$$

$$= \langle f,f\rangle - \langle f,\lambda g\rangle - \langle \lambda g, f\rangle + \langle \lambda g, \lambda g\rangle =$$

$$= \langle f,f\rangle - \bar\lambda\langle f,g\rangle - \lambda\overline{\langle f,g\rangle} + |\lambda|^2\langle g,g\rangle$$

נבחר $\lambda$: $\lambda = \frac{\langle f,g\rangle}{\langle g,g\rangle}$

$$= \underbrace{\langle f,f\rangle}_{\|f\|} - \frac{|\langle f,g\rangle|^2}{\underbrace{\langle g,g\rangle}_{\|g\|^2}} \rightarrow$$

הביטוי הזה גדול מאפס, מתברר
אילו נעשה כה בעולם

$$|\langle f,g\rangle|^2 \le \|f\|^2\cdot\|g\|^2 \quad \blacksquare$$

ת.ב.
שיוויון מתקיים אמ"מ $g=cf$

$$\left|\int_0^1 f\cdot\bar g\right| \le \sqrt{\int_0^1|f|^2}\cdot\sqrt{\int_0^1|g|^2}$$
$$\int_0^1|f|\cdot|g| \;(\wedge|)$$

⑥ אי-שוויון משולש:

$$\|f+g\|\le\|f\|+\|g\|$$

הוכחה:

נראה לה שנכון, לכן צריך לעבוד עם משהו שהוא רובם.

$$\underbrace{\langle f+g, f+g\rangle}_{=\|f+g\|^2} = \langle f,f\rangle + \langle g,f\rangle + \langle f,g\rangle + \langle g,g\rangle = \|f\|^2 +$$
$$+2\cdot \mathrm{Re}\langle f,g\rangle + \|g\|^2 \le$$

חיבור של מספר והצמוד שלו
$\le |\langle f,g\rangle|$ החלק הממשי קטן מהערך המוחלט.

$$\le \|f\|^2 + 2\cdot\underbrace{|\langle f,g\rangle|}_{\le\|f\|\cdot\|g\|} + \|g\|^2 \underset{C-S}{\le} (\|f\|+\|g\|)^2 \quad \blacksquare$$

הגדרה: $f,g\in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$

$f,g$ אורתוגונליים $(f\perp g)$ אם $\langle f,g\rangle = 0$.

דוגמא: הבסיס הקנוני: $e_n(t) = e^{2\pi i n t} = \cos(2\pi n t) + i\cdot\sin(2\pi n t)$

$$\langle e_n, e_m\rangle = \int_0^1 e^{2\pi i n t}\cdot e^{-2\pi i m t}\,dt = \int_0^1 e^{2\pi i(n-m)t}\,dt =$$

להחשיב אם זה הצגה של קוסינוס וסינוס.

$$= \frac{1}{2\pi i(n-m)}\cdot e^{2\pi i(n-m)t}\Big|_0^1 = 0 \quad = \begin{cases}0, & n\neq m\\ 1, & n=m\end{cases}$$

כשהקדמה היא מתעוררת כ: $n\neq m$ על המשפט מוארה.

$$\boxed{\langle e_n, e_m\rangle = \begin{cases}0, & n\neq m\\ 1, & n=m\end{cases}}$$

אלה הם אורתונורמליים (כשמשתמשים נורמה, יוצא שהנורמה שווה ל-1) וגם אורתוגונליים.

הגדרה: פולינום טריגונומטרי:

$$P_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n\cdot e_n(t).\qquad \deg P_N = N: \qquad c_n\in\mathbb{C}$$

$$P_N\in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$$

**אי-שוויון משולש:** $\|f+g\| \le \|f\| + \|g\|$

**הוכחה:**

$$\underbrace{\langle f+g, f+g\rangle}_{=\|f+g\|^2} = \langle f,f\rangle + \langle g,f\rangle + \langle f,g\rangle + \langle g,g\rangle = \|f\|^2 + \underbrace{2Re\langle f,g\rangle}_{\le|\langle f,g\rangle|} + \|g\|^2 \le$$

(חלק ממשי של מספר מרוכב קטן מערכו המוחלט של המספר)

$$\le \|f\|^2 + 2\underbrace{|\langle f,g\rangle|}_{\le\|f\|\cdot\|g\|} + \|g\|^2 \underset{C-S}{\le} (\|f\|+\|g\|)^2 \qquad \square$$

**הגדרה:** $f,g \in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$

$f,g$ אורתוגונליים $(f \perp g)$ אם $\langle f,g\rangle = 0$

**דוגמא:** $e_n(t) = e^{2\pi i n t} \; (=\cos(2\pi n t) + i\sin(2\pi n t)) \qquad n\in\mathbb{Z}$

$$\langle e_n, e_m\rangle = \int_0^1 e^{2\pi i n t} e^{-2\pi i m t}\,dt = \int_0^1 \underbrace{e^{2\pi i(n-m)t}}_{=\frac{1}{2\pi i(n-m)}e^{2\pi i(n-m)t}\Big|_0^1 = 0}\,dt = \begin{cases} 0, & n\ne m \\ 1, & n=m\end{cases}$$

$$\boxed{\langle e_n, e_m\rangle = \begin{cases} 0, & n\ne m \\ 1, & n=m\end{cases}}$$

איברים אורתונורמליים

**הגדרה:** פולינום טריגונומטרי:

$$P_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e_n(t), \quad \deg P_N = N \quad ; \; c_n \in \mathbb{C}$$

$P_N \in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ (זו פונקציה רציפה)

$$\langle P_N, e_k\rangle = \langle \sum_{-N}^{N} c_n e_n, e_k\rangle = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{לינאריות של מכפלה פנימית}}}{\sum_{-N}^{N}} c_n \langle e_n, e_k\rangle = \begin{cases} c_k, & |k|\le N \\ 0, & |k|>N\end{cases}$$

$c_n = \langle P_N, e_n\rangle$

כלומר, אפשר לרשום פולינום טריגונומטרי כך:

$$\boxed{P_N(t) = \sum_{-N}^{N} \underbrace{\langle P_N, e_n\rangle}_{\hat{P}_N(n)} e_n}$$

$$\hat{P}_N(n) \overset{def}{=} \langle P_n, e_n\rangle$$

$$P = \sum_{-N}^{N} \langle P, e_n\rangle e_n = \sum_{-N}^{N} \hat{P}(n) e_n$$

$$Q = \sum_{-N}^{N} \hat{Q}(n) e_n$$

$$\langle P, Q\rangle = \langle \sum_{-N}^{N} \hat{P}(n) e_n, \sum_{-N}^{N} \hat{Q}(m) e_m\rangle = \sum_{m,n=-N}^{N} \hat{P}(n)\overline{\hat{Q}(m)} \langle e_n, e_m\rangle = \sum_{n=-N}^{N} \hat{P}(n)\overline{\hat{Q}(n)}$$

$$\boxed{\langle P, Q\rangle = \sum_{-N}^{N} \hat{P}(n)\hat{Q}(n)}$$

מסקנה: $Q = P$

$$\|P\|^2 = \sum_{-N}^{N} |\hat{P}(n)|^2 \quad (*)$$

$$f \in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$$

הגדרה: מקדמי Fourier

$$\hat{f}(n) = \langle f, e_n \rangle = \int_0^1 f(t) e^{-2\pi i n t}\, dt \quad , \quad n \in \mathbb{Z}$$

שאלות: (שאנו מעוניינים לדעת את התשובה)

1) $f \overset{??}{=} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) e_n$ (לגבי פונקציות רציפות)

2) (i) $\langle f, g \rangle \overset{??}{=} \sum \hat{f}(n) \overline{\hat{g}(n)}$

(ii) $\|f\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2$

תרגיל בית: $(i) \Leftrightarrow (ii)$

הגדרה: סכום חלקי: $S_N f = \sum_{|n|\le N} \hat{f}(n) e_n$

טענה: $\langle f, S_N f \rangle = \langle S_N f, f \rangle = \underbrace{\langle S_N f, S_N f \rangle}_{\|S_N f\|^2}$

נוכיח כי $\langle f, S_N f \rangle = \langle S_N f, S_N f \rangle$:

$$\langle f, S_N f \rangle = \langle f, \sum_{|n|\le N} \hat{f}(n) e_n \rangle = \sum_{|n|\le N} \overline{\hat{f}(n)} \underbrace{\langle f, e_n \rangle}_{=\hat{f}(n)} = \sum_{|n|\le N} |\hat{f}(n)|^2 \overset{(*)}{=} \langle S_N f, S_N f \rangle$$

אי-שוויון Bessel

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2 \le \|f\|^2 \left(= \int_0^1 |f|^2\right) \quad \forall f \in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$$

הוכחה: מספיק להוכיח כי $\forall n \in \mathbb{N} \ \sum_{|n|\le N} |\hat{f}(n)|^2 \le \|f\|^2 \quad (!)$

(אי-שוויון עבור סכום חלקי)

ומחברים" ו אנו יודעים כי מוכח נובע כי הגבול קיים $\le \|f\|^2$.

בדיקה של (!):

$$0 \le \langle f - S_N f, f - S_N f \rangle = \langle f, f \rangle - \langle S_N f, f \rangle - \langle f, S_N f \rangle + \langle S_N f, S_N f \rangle \overset{\text{טענה}}{=}$$

$$= \langle f, f \rangle - \langle S_N f, S_N f \rangle \overset{(*)}{=} \|f\|^2 - \sum_{|n|\le N} |\hat{f}(n)|^2 \Rightarrow \text{מתקיים } (!)$$

מסקנה: למה Riemann-Lebesgue

$$f\in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\hat{f}(n)=0 \quad \left(|\hat{f}(n)|\xrightarrow[n\to\pm\infty]{}0\right)$$

הערה: 1. $f\in R[a,b]$ $\quad -\infty<a<\infty$

$$\int_a^b f(t)e^{i\lambda t}\,dt \xrightarrow[\lambda\to\infty]{} 0$$

2. $\int_{-\infty}^{\infty}|f|<\infty$ ($f$ אינטגרבילי בהחלט) $\Leftarrow$ $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\lambda t}dt\to 0$

הערה (1) $f$ גזירה למקוטעין $\Leftarrow$ $\hat{f'}(n)=2\pi i n\hat{f}(n)$

(2) $f_a(t)\overset{def}{=}f(t-a)$

$$\hat{f}_a(n)=e^{-2\pi i a n}\hat{f}(n)$$

משפט: $f\in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$, $x\in\mathbb{R}$

$\exists\delta>0\ \forall t\in(x-\delta,x+\delta)\ |f(t)-f(x)|\le M|t-x|$ (תנאי ליפשיץ)

אז $S_N f(x)\xrightarrow[N\to\infty]{} f(x)$

(והנגזרת חסומה)

(למשל; אם $f$ גזירה, לפי לגרנז' המשפט מתקיים)

$$(S_N f)(x)=\sum_{|n|\le N}\hat{f}(n)e_n(x)=\sum_{|n|\le N}\int_0^1 f(t)e^{-2\pi i n t}dt\cdot e^{2\pi i n x}=$$

$$=\int_0^1 f(t)\underbrace{\sum_{|n|\le N}e^{2\pi i n(x-t)}}_{D_N(x-t)}dt$$

הגדרה: גרעין דיריכלה (Dirichlet kernel)

$$D_n(t)\overset{def}{=}\sum_{|n|\le N}e^{2\pi i n t}\underset{\text{טענה}}{=}\frac{\sin\pi(2N+1)t}{\sin\pi t}$$

לכן $\boxed{(S_N f)(x)=\int_0^1 f(t)D_N(x-t)\,dt}$

((ניתן לשנות את גבולות האינטגרציה ל- $-\frac{1}{2}$ ו- $\frac{1}{2}$

$$\boxed{\int_0^1 D_N(t)\,dt=1}$$

$$\left(\int_0^1 e_n=\begin{cases}0, & n\ne 0\\ 1, & n=0\end{cases}\right)$$

הוכחת המשפט:

$$S_N f(x)-f(x)=\int_{-\frac12}^{\frac12}[f(t)-f(x)]D_N(x-t)\,dt\underset{\substack{\tau=x-t\\ t=x-\tau}}{=}\int_{-\frac12}^{\frac12}[f(x-\tau)-f(x)]D_N(\tau)\,d\tau$$

$$=\int_{-\frac12}^{\frac12}[f(x-\tau)-f(x)]\frac{\sin\pi(2N+1)\tau}{\sin\pi\tau}\,d\tau=\int_{-\frac12}^{\frac12}[f(x-\tau)-f(x)]\left[\frac{\sin 2N\pi\tau\cos\pi\tau}{\sin\pi\tau}+\cos 2\pi N\tau\right]d\tau=$$

$$\underbrace{\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left( \frac{f(x-\tau)-f(x)}{\sin \pi \tau} \cos \pi \tau \right) \sin 2\pi N \tau \, d\tau}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0} + \underbrace{\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left( f(x-\tau)-f(x) \right) \underbrace{\cos 2\pi N \tau \, d\tau}_{=\frac{1}{2}(e_{2N}+e_{-2N})}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$$

$$\cos y = \frac{1}{2}\left(e^{iy} + e^{iy}\right)$$

$$\mathrm{II} = \frac{1}{2}\left( f(x-\tau) - f(x) \right)^{\wedge}(2N) + \ldots (-2N)$$

פונ' רציפה של מוגדר

(ה-$\wedge$ הוא של פונ' ההפרש)

לפי למה R-L :　　$\mathrm{II} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$

באופן דומה ניתן להראות עבור האינטגרל ה-I

$$\tau \longmapsto \frac{f(x-\tau)-f(x)}{\sin \pi \tau} \cos \pi \tau$$