19/6/08

חדו"א 2 - הרצאה 13

<u>התכנסות נקודתית של טורי פורייה</u>

<u>משפט</u>: $f \in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$, $x \in \mathbb{R}$

(*) $\exists \delta > 0, M < \infty : |f(x) - f(y)| < M|x-y| \quad , \forall y \in (x-\delta, x+\delta)$

אז $(S_N f)(x) \xrightarrow[N \to \infty]{} f(x)$

$$(S_N f)(x) = \sum_{|n| \le N} \underbrace{\hat{f}(n)}_{= \int_0^1 f(t) e^{-2\pi i n t} dt} e^{2\pi i n x} =$$

$$= \int_0^1 f(t) D_N(x-t)\, dt \ominus$$

$$D_N(t) = \frac{\sin \pi (2N+1) t}{\sin \pi t}$$

$$\ominus \int_0^1 f(x-t) D_N(t)\, dt = \int_{-1/2}^{1/2} f(x-t) D_N(t)\, dt$$

$$(S_N f)(x) - f(x) \ominus$$

$$\int_0^1 D_N(t)\, dt = 1$$

$$\ominus \int_{-1/2}^{1/2} [f(x-t) - f(x)] D_N(t)\, dt =$$

$$D_N(t) = \frac{\cos \pi t}{\sin \pi t} \cdot \sin 2\pi N t + \cos 2\pi N t$$

$$\ominus \int_{-1/2}^{1/2} \underbrace{\left(\frac{f(x-t) - f(x)}{\sin \pi t} \cdot \cos \pi t \right)}_{I} \sin 2\pi N t\, dt + \underbrace{\int_{-1/2}^{1/2} \underbrace{[f(x-t) - f(x)]}_{g(t)} \cos 2\pi N t\, dt}_{II}$$

<u>למה Riemann-Lebesgue</u>:

$$\forall g \in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \Rightarrow \hat{g}(n) \longrightarrow 0 \quad , |n| \to \infty$$

II $g(t) := f(x-t) - f(x)$

$g \in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$

$$\cos 2\pi N t = \frac{1}{2}\left(e^{2\pi i N t} + e^{-2\pi i N t} \right)$$

$$II = \frac{1}{2}[\hat{g}(-N) + \hat{g}(N)] \xrightarrow[N \to \infty]{R-L} 0$$

I $g(t) = \dfrac{f(x-t) - f(x)}{\sin \pi t} \cos \pi t$

$g(t+1) = g(t)$

$$(*) \Rightarrow |f(x-t)-f(x)| \le M|t| \quad , |t|<\delta$$

$\Leftarrow$ ב-$t=0$ פונקציה g רציפה

$$\left(|g(t)-g(0)| \xrightarrow{t\to 0} 0 \right)$$

$$\sin 2\pi N t = \frac{1}{2i}\left(e^{2\pi i N t} - e^{-2\pi i N t}\right)$$

$$I = \frac{1}{2i}\left(\hat{g}(-N) - \hat{g}(N)\right) \xrightarrow[N\to\infty]{R-L} 0$$

$\square$

הערה – במקום: f' קיים ורציף ב $(x-\delta, x+\delta)$ $(**)$

תנאי זה חזק יותר מהתנאי הקודם: $\left((**) \Rightarrow (*) \right)$

ועכשיו $(*)$ H-לי $(**)$ במקום,

$$g(0) = -\frac{f'(x)}{\pi}$$

$\square$

2. Fejer

Improved convergence = Fejer's sums

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} (S_n f)(x) = \int_0^1 f(x-t)\left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} D_n(t)\right) dt$$

Fejer kernel:

$$F_N(t) \overset{def}{=} \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} D_n(t) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{|k|\le n} e^{2\pi i k t} \underset{\text{תרגיל}}{=} \frac{1}{N}\left(\frac{\sin \pi N t}{\sin \pi t}\right)^2$$

תכונות של גרעין פייר

1) $F_N \ge 0$

2) $\int_0^1 F_N = 1$ $\qquad -1/2 \le t \le 1/2$

3) $\forall \varepsilon>0 \quad \max_{\varepsilon \le |t| \le \frac{1}{2}} F_N(t) \le \frac{C(\varepsilon)}{N}$

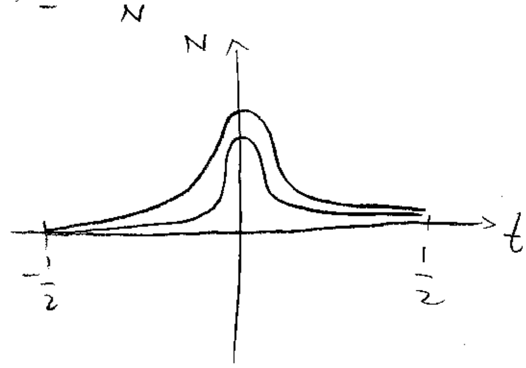
הוכחה של (3):

$$F_N(t) \le \frac{1/\varepsilon^2}{N}$$

$$|t| > \varepsilon \quad |\sin \pi t| \ge |t| \ge \varepsilon$$

$$|\sin y| \ge \frac{|y|}{\pi}$$

$$|y| < \frac{\pi}{2}$$



המקסימום של הראשי – הולך יותר ויותר גדול.

משפט Fejer

$f \in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \Rightarrow \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} S_n f \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f$

מסקנה (משפט Weierstrass): פולינומים טריגונומטריים "צפופים" ב- $C(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \overset{\text{פולינום טריגונומטרי}}{Q_N} : \max|f - Q_N| < \varepsilon$

[הגדרה של פולינום טריגונומטרי $\sum_{-N}^{N} c_n e^{2\pi i n t}$]

הוכחה של משפט Fejer

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}(S_n f)(x) - f(x)\right| = \left|\int_{-1/2}^{1/2}[f(x-t) - f(x)]F_N(t)\,dt\right| \le$$

$$\le \int_{-1/2}^{1/2}|f(x-t) - f(x)|F_N(t)\,dt \circledast$$ (כעין פ"ר מיני לגרעין להוכחנו)

נקבע $\varepsilon > 0$ ונבחר $\delta > 0$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x-t) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall t \in [-\delta, \delta]$$

(רציפות של f במ"ש ב- $\mathbb{R}$)

$$\circledast \int_{-\delta}^{\delta}|f(x-t) - f(x)|F_N(t)\,dt + \int_{\frac{1}{2}\ge|t|\ge\delta}|f(x-t) - f(x)|F_N(t)\,dt$$

$$\text{I} < \varepsilon\int_{-\delta}^{\delta}F_N(t)\,dt \le \varepsilon\int_{-1/2}^{1/2}F_N(t)\,dt = \varepsilon$$

$$\text{II} \quad \mu = \max_{\mathbb{R}}|f| < \infty$$

$$\wedge\!\!| \; 2\mu \sup_{\frac{1}{2}\ge|t|>\delta}F_N(t) \overset{③}{\le} \frac{2\mu\cdot c(\delta)}{N} \underset{\uparrow}{<} \varepsilon \qquad \square$$

בחירה של N

מסקנות

① שוויון Parseval: $\forall f \in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \quad \underbrace{\int_0^1|f|^2}_{(=\|f\|^2)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}}|\hat{f}(n)|^2$

את הכיוון $\ge$ הוכחנו (אי שוויון בסל)

נוכיח את הכיוון ההפוך $\le$:

$$\overbrace{\int_{-1/2}^{1/2}\underbrace{\left|\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}S_n f\right|^2}_{\rightrightarrows f}}^{\|\ \|^2} \xrightarrow{\text{לפי Fejer}} \int_{-1/2}^{1/2}|f|^2$$

$$\left\|\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}S_n f\right\| \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \|f\|$$ (אי שוויון המשולש של מינקובסקי [illegible]
של נורמה =)

$$\underset{\uparrow}{\le} \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\|S_n f\|$$

אי שוויון המשולש

$$\|S_n f\|^2=\sum_{|k|\le n}|\hat f(k)|^2$$

$$\textcircled{=}\ \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\underbrace{\sqrt{\sum_{|k|\le n}|\hat f(k)|^2}}_{a_n}$$

הסדרה a_n מתכנסת (מכיוון ש $\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\hat f(k)|^2<\infty$), לכן גם
הסדרה $\sqrt{a_n}$ מתכנסת (לאותו גבול) וכן הסדרה $\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\sqrt{a_n}$
מתכנסת ל- $\sqrt{\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\hat f(k)|^2}$

(גבול הכל ימני)

$\Leftarrow$ $$\|f\|\le\sqrt{\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\hat f(k)|^2}$$

$\Leftarrow$ $$\int_0^1|f|^2\le\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\hat f(k)|^2 \quad \square$$

2. אם $\hat f(n)=0$, $n\in\mathbb{Z}$ אזי $f\equiv 0$ (משפט יחידות)

נניח ש $\forall n,\ \hat f(n)=0$ $\Leftarrow$ $\int_0^1\underbrace{|f|^2}_{\text{רציפה}}=0$ $\Leftarrow$ $f\equiv 0$

$f,g\in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ ו- $\forall n\ \ \hat f(n)=\hat g(n)$ $\Leftarrow$ $f\equiv g$

3. $\|S_N f-f\|\xrightarrow[N\to\infty]{}0$ $\quad\left(\int_0^1|S_N f-f|^2\xrightarrow[N\to\infty]{}0\right)$

הוכחה:

$$\|S_N f-f\|^2=\langle S_N f-f,S_N f-f\rangle=$$

$$=\langle S_N f,S_N f\rangle-\langle S_N f,f\rangle-\langle f,S_N f\rangle+\langle f,f\rangle\ \textcircled{=}$$

(ראינו בשיעור שעבר כי $\langle S_N f,S_N f\rangle=\langle S_N f,f\rangle=\langle f,S_N f\rangle$)

$$\textcircled{=}\ \langle f,f\rangle-\langle S_N f,S_N f\rangle=\|f\|^2-\|S_N f\|^2\overset{(p)}{=}\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\hat f(n)|^2-\sum_{|n|\le N}|\hat f(n)|^2=$$

$$=\sum_{|n|>N}|\hat f(n)|^2\xrightarrow{N\to\infty}0$$

$$\|f\|^2=\|S_N f\|^2+\|f-S_N f\|^2$$

$\underset{\text{(אורתוגונלי)}}{f-S_N f\perp S_N f}$

(בדיוק אותו משפט של פיתגורס, רק שמדובר במספרים מרוכבים)

4. נניח ש $\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\hat f(n)|<\infty$ אז $S_N f\rightrightarrows f$ (ובהחלט C)

הוכחה: על הטור $\sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat f(n)e^{2\pi int}$

לפי M-test (Weierstrass) מתכנס במ״ש ובהחלט (C)

$$\left(|\hat f(n)e^{2\pi int}|=|\hat f(n)|\right)$$

(*) $g=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{f}(n)e^{2\pi i n t}$, $g\in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$

$$g\overset{?}{=}f$$

$$\|S_N f-f\|\xrightarrow[N\to\infty]{③}0$$

$$\|S_N f-g\|\underset{\uparrow}{\xrightarrow{N\to\infty}}0$$

לכן (*) מתכנס במ"ש

$\|f-g\|\le\|S_N f-f\|+\|S_N f-g\|\longrightarrow 0$ $\Leftarrow$

$\int_0^1|f-g|^2=0$ $\Leftarrow$

$f\equiv g$. מ.ש.ל $\Leftarrow$

(5) $f\in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$, f' רציפה למקוטעין. אז $S_N f\overset{N\to\infty}{\rightrightarrows}f$ (במ"ש ובהחלט)

<u>טענה</u>: $\hat{f'}(n)=2\pi i n\hat{f}(n)$

<u>ה.כ</u> $\overset{\shortparallel}{\int_0^1 f'(t)e^{-2\pi i n t}\,dt}$

$$?\quad\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\hat{f}(n)|<\infty\quad ?$$

$\sum_{|n|\le N}|\hat{f}(n)|$ $\qquad\sum|\hat{f'}(n)|^2<\infty\Rightarrow\sum_{n\in\mathbb{Z}}n^2|\hat{f}(n)|^2<\infty$