20/6/08

חדו"א 2 - הרצאה 14

המשך משיעור שעבר

$f\in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z}),\ x\in\mathbb{R}$

f' קיימת ורציפה בסביבה של x $\xrightarrow{(*)}$ $g\in C$

$$\int_0^{1/2}\underbrace{\left(\frac{f(x-t)-f(x)}{\sin\pi t}\cdot\cos\pi t\right)}_{g(t)}e^{2\pi i N t}\,dt=\hat g(N)\xrightarrow{N\to\infty}0$$

$$(*)\quad |f(y)-f(x)|\le M|y-x|,\quad y\in(x-\delta,x+\delta)$$

$$|f(x-t)-f(x)|\le M|t|,\quad -\delta<t<\delta$$

זה אומר $g\in R$, $\int_a^b|g|<\infty \Rightarrow \int_a^b g(t)e^{i\lambda t}dt\xrightarrow[\lambda\to\pm\infty]{}0$

$$(*)\Rightarrow\int_0^{1/2}|g|<\infty\Rightarrow\hat g(N)\to0,\ N\to\infty$$

(5) $f\in C^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ (פונקציה מחזורית וגזירה ברציפות ומחזורית, כלומר (גם הנגזרת $f'(x+1)=f'(x)$)

$\Leftarrow$ $\sum|\hat f(n)|<\infty$ $\Rightarrow$ $S_Nf\rightrightarrows f$ במ"ש ובהחלט

תכונה זו נלמדה בשיעור הקודם רק הנגזרת רציפה (מחזורית)

תזכורת: $\hat{f'}(n)=2\pi i n\hat f(n)$

הוכחה של (5):

אי-שוויון קושי שוורץ

$$\sum_{\substack{|n|\le N\\ n\ne0}}|\hat f(n)|=\sum_{\substack{|n|\le N\\ n\ne0}}\underbrace{\frac1n}_{a_n}\cdot\underbrace{n|\hat f(n)|}_{b_n}\le\sqrt{\sum_{\substack{|n|\le N\\ n\ne0}}\frac1{n^2}\cdot\sum_{\substack{|n|\le N\\ n\ne0}}n^2|\hat f(n)|^2}\le$$

$$\le c\sqrt{\sum_{|n|\le N}n^2|\hat f(n)|^2}=\frac{c}{2\pi}\sqrt{\sum_{|n|\le N}|\hat{f'}(n)|^2}\le C_1\sqrt{\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\hat{f'}(n)|^2}=$$

$\sum\frac1{n^2}$ מתכנס

$$n^2|\hat f(n)|^2=\frac1{4\pi^2}|\hat{f'}(n)|^2$$

משפט פרסבל עבור f' או מספיק Bessel

$=C_1\|f'\|<\infty$ (הוכחנו שכל הסכומים החלקיים חסומים, לכן הטור מתכנס) $\square$

הערה - ת.ב: הוכחת את המשפט ל-f רק ש-f' רציפה למקוטעין.

פתרונות

1) $f(x)=(1-2x)^2,\ 0\le x\le 1$

בנוסף גם ב- $x=1$ $f(x)=1$, לכן זו פונקציה מחזורית

$f\in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$, $f(x+1)=f(x)$

נמצא את מקדמי פורייה:

$$\hat f(0)=\int_0^1 (1-2x)^2\,dx = 1-4\frac{1}{2}+4\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

עבור $n\neq 0$ נקבל

$$\hat f(n)=\int_0^1 (1-2x)^2 e^{-2\pi i n x}\,dx = -\frac{1}{2\pi i n}\int_0^1 (1-2x)^2 \left(e^{-2\pi i n x}\right)' dx =$$

יש לעשות אינטגרציה בחלקים פעמיים

$$= \frac{1}{2\pi i n}\int_0^1 2(1-2x)(-2)e^{-2\pi i n x}\,dx = -\frac{2}{\pi i n}\int_0^1 (1-2x)e^{-2\pi i n x}\,dx = \left(\int_0^1 e^{-2\pi i n x}dx = 0\ (n\neq 0)\right)$$

$$= \frac{4}{\pi i n}\int_0^1 x e^{-2\pi i n x}\,dx = -\frac{2}{(\pi i n)^2}\int_0^1 x\left(e^{-2\pi i n x}\right)' dx =$$

$$= \frac{2}{(\pi n)^2}\Big[\underbrace{x e^{-2\pi i n x}\Big|_0^1}_{=1-0=1} - \underbrace{\int_0^1 e^{-2\pi i n x}\,dx}_{=0}\Big] = \frac{2}{(\pi n)^2}$$

$$\boxed{(1-2x)^2 = \frac{1}{3}+\sum_{n\neq 0}\frac{2}{(\pi n)^2}e^{2\pi i n x}} \quad (i)$$

הערות:

1. הטור מתכנס במ"ש ל- f (כי הטור של המקדמים מתכנס בהחלט)
$\left(\sum|\hat f(n)|<\infty\right)$

2.

$$\boxed{(1-2x)^2 = \frac{1}{3}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi n x}{n^2}} \quad (ii)$$

נציב $x=0$ ב- (ii) ונקבל:

$$1=\frac{1}{3}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

$$\boxed{\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}}$$

נציב $x=\frac{1}{2}$ ונקבל

$$0=\frac{1}{3}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=-\frac{\pi^2}{12}$$

Parseval + (i)

$$\int_0^1 (1-2x)^4\,dx = \frac{1}{9}+\sum_{n\neq 0}\frac{4}{\pi^4 n^4}$$

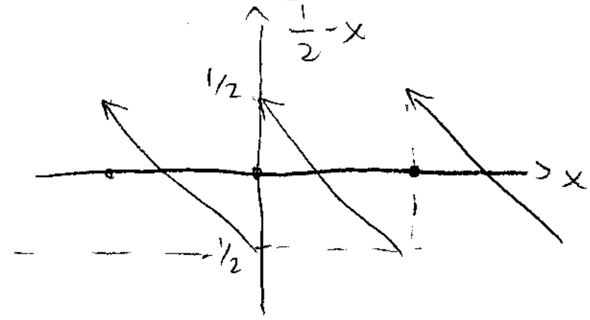
$$\left(\int_0^1 |f|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}}|\hat f(n)|^2,\ f(x)=(1-2x)^2\right)$$

$$\boxed{\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}}$$

נשאר עם (ii) ;

$$-4(1-2x) \sim -\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi n x}{n}$$

$$\boxed{\frac{1}{2}-x \sim \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi n x}{n}}$$



הטור מתכנס ל- $g(x)=\frac{1}{2}-x$

לכל $0<x<1$ ובמ"ש ב-$[\delta,1-\delta]$

לכל $\delta>0$.

הוכחה:

• ההתכנסות במ"ש: לפי Dirichlet

• טור מתכנס ל- g

בנקודות אי-רציפות; מספיק לבדוק עבור $x=0$ - הטור מתאפס ולכן

x מתכנס לאפס. הערה: $\frac{1}{2}(f(+0)+f(-0))=0$

2) $-\frac{1}{2}\le x\le\frac{1}{2}$ $\quad f(x)=\cos 2\pi\alpha x$ $\quad \alpha\notin\mathbb{Z}$

$f(x+1)=f(x)$

נחשב את מקדמי פורייה:

$$\hat{f}(n)=\int_{-1/2}^{1/2}\cos 2\pi\alpha x\cdot \underbrace{e^{-2\pi i n x}}_{\cos 2\pi n x - i\sin 2\pi n x}\,dx = \int_{-1/2}^{1/2}\cos 2\pi\alpha x\cdot\cos 2\pi n x\,dx =$$

(נשאר רק האינטגרל עבור זוגי)

$$=\frac{1}{2}\int_{-1/2}^{1/2}\left[\cos 2\pi x(\alpha+n)+\cos 2\pi x(\alpha-n)\right]dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin 2\pi x(\alpha+n)}{2\pi(\alpha+n)}\Bigg|_{-1/2}^{1/2}+\frac{\sin 2\pi x(\alpha-n)}{2\pi(\alpha-n)}\Bigg|_{-1/2}^{1/2}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin\pi(\alpha+n)}{\pi(\alpha+n)}+\frac{\sin\pi(\alpha-n)}{\pi(\alpha-n)}\right]\stackrel{\uparrow}{=}$$

$\sin(\beta\pm\pi n)=\sin\beta\cdot(-1)^n$

$$=\frac{(-1)^n}{2}\left[\frac{\sin\pi\alpha}{\pi(\alpha+n)}+\frac{\sin\pi\alpha}{\pi(\alpha-n)}\right]=\frac{(-1)^n\sin\pi\alpha}{2\pi}\left[\frac{1}{\alpha+n}+\frac{1}{\alpha-n}\right]=$$

$$=\frac{(-1)^n\alpha\sin\pi\alpha}{\pi(\alpha^2-n^2)}=\hat{f}(n) \qquad \sum|\hat{f}(n)|<\infty$$

$$\cos 2\pi\alpha x=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{(-1)^n\alpha\sin\pi\alpha}{\pi(\alpha^2-n^2)}\cdot e^{2\pi i n x} = \frac{\alpha\sin\pi\alpha}{\pi\alpha^2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha\sin\pi\alpha}{\alpha^2-n^2}\cos 2\pi n x$$

מתכנס במ"ש

עבור $x=\frac{1}{2}$ נקבל

$$\frac{\cos\pi\alpha}{\sin\pi\alpha}=\frac{1}{\pi\alpha}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\alpha}{\alpha^2-n^2}$$

$$\boxed{\cot\pi\alpha=\frac{1}{\pi\alpha}+\frac{1}{\pi}\sum^{\infty}\frac{2\alpha}{\alpha^2-n^2}} = \frac{1}{\pi}\lim\sum\frac{1}{\alpha+n}$$

$$\cot \pi\alpha - \frac{1}{\pi\alpha} = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2}$$

לכן מתכנס במ"ש בכל קטע $[0,1-\varepsilon]$ $\quad 0 \le \alpha \le 1-\varepsilon \; (\varepsilon > 0)$

(לפי M-test)

כעת ניתן לקחת אינטגרל בקטע $0<x<1$;

$$\int_0^x \left(\cot\pi\alpha - \frac{1}{\pi\alpha}\right) d\alpha = \lim_{\delta \to 0} \int_\delta^x \dots = \lim_{\delta\to 0}\left(\frac{1}{\pi}\log\sin\pi\alpha\Big|_\delta^x - \frac{1}{\pi}\log\alpha\Big|_\delta^x\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\log\frac{\sin\pi x}{x} - \underbrace{\frac{1}{\pi}\lim_{\delta\to 0}\log\frac{\sin\pi\delta}{\delta}} = \frac{1}{\pi}\log\frac{\sin\pi x}{x} - \frac{\log\pi}{\pi} = \boxed{\frac{1}{\pi}\log\frac{\sin\pi x}{\pi x}}$$

לכן ;

$$\frac{1}{\pi}\log\frac{\sin\pi x}{\pi x} = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\log\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)$$

$$\frac{\sin\pi x}{\pi x} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right) \qquad \boxed{\sin\pi x = \pi x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)} \qquad \text{Euler} \quad 0 \le x \le 1$$

(פיתוח של $\sin\pi x$ למכפלה אינסופית)

המכפלה מתכנסת בהחלט ובמ"ש

ת.ב*: לבדוק שנוסחת אוילר נכונה לכל $x\in\mathbb{R}$.

דוגמא: $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$

הוכחה:

$$\underbrace{\int_0^{1/2}\frac{\sin\pi(2N+1)t}{\sin\pi t}\,dt = 1}$$

$$\underbrace{\int_{-1/2}^{1/2}\frac{\sin\pi(2N+1)t}{\pi t}\,dt}_{I_N} + \underbrace{\int_{-1/2}^{1/2}\left(\frac{1}{\sin\pi t}-\frac{1}{\pi t}\right)\sin\pi(2N+1)t\,dt}_{II_N}$$

$$I_N = \{x = \pi(2N+1)t\} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi(N+1/2)}^{\pi(N+1/2)}\frac{\sin x}{x}\,dx \xrightarrow[N\to\infty]{} \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$$

$II_N \longrightarrow 0, \quad N\to\infty$

$$t \longmapsto \underbrace{\frac{1}{\sin\pi t} - \frac{1}{\pi t}}_{h(t)} \in C\left[-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right]$$

(למת רימן לבג)

$$II = \int_{-1/2}^{1/2} h(t)\,\frac{1}{2i}\left[e^{\pi i(2N+1)t} - e^{-\pi i(2N+1)t}\right]dt \xrightarrow[N\to\infty]{R-L} 0$$