23.6.08
אהרונסון

23/6

מרחבים אוקלידיים:

מכפלה סקלרית על $\mathbb{R}^n$:

$\mathbb{R}^n=\{x=(x_1,\dots,x_n) : x_k\in\mathbb{R} ,\ 1\le k\le n\}$.

המקיים - $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\ni(x,y)\longmapsto\langle x,y\rangle$

(i) $\langle x,x\rangle\ge0$, שוויון $\iff$ $x=0$

(ii) $\langle x,y\rangle=\langle y,x\rangle$

(iii) $x,y\in\mathbb{R}^n$, $t\in\mathbb{R}$, $t\langle x,y\rangle=\langle tx,y\rangle$.

(iv) $\langle x+y\ ,z\rangle=\langle x,z\rangle+\langle y,z\rangle$

$e_k=(0\cdot0\dots010\dots0)$ (מקום k)

$(e_k)_j=\begin{cases}0 & k\neq j\\ 1 & k=j\end{cases}$

$$x=\sum_{k=1}^n x_ke_k$$

$$\langle x,y\rangle=\left\langle\sum_{k=1}^n x_ke_k\ ,\sum_{l=1}^n y_le_l\right\rangle=\sum_{k=1}^n x_k\left\langle e_k,\sum_{l=1}^n y_le_l\right\rangle=\sum_{k,l=1}^n x_ky_l\langle e_k,e_l\rangle$$

לדוגמא - $\langle x,y\rangle=\sum_{k=1}^n x_ky_k$

$\langle e_k,e_l\rangle=\langle e_l,e_k\rangle$

$\langle e_k,e_k\rangle>0$

נורמה - $\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}$

?

מקיים - (i) $\|x\|\ge0$, שוויון $\iff$ $x=0$.

(ii) $\|t\cdot x\|=|t|\cdot\|x\|$, $x\in\mathbb{R}^n$, $t\in\mathbb{R}$.

(iii) $\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$

עבור $1<p<\infty$ נגדיר $\|x\|_p:=\left(\sum_{k=1}^n|x_k|^p\right)^{\frac1p}$

טענה: $\|\cdot\|_p$ נורמה עבור $1<p<\infty$.

($\|x\|_2=\sqrt{\langle x,x\rangle}$ כאשר $\langle x,y\rangle=\sum_{k=1}^n x_k\cdot y_k$).

הוכחה: עבור $1<p<\infty$, צ"ל $\|x+y\|_p\le\|x\|_p+\|y\|_p$.

נשתמש באי שוויון Hölder - עבור $x,y\in\mathbb{R}^n$: $\left(\frac1p+\frac1q=1\right)$, $q=\frac{p}{p-1}$, $\langle x,y\rangle\le\|x\|_p\|y\|_q$

שוויון $\iff$ קיים $a\in\mathbb{R}$
$y_k=a\cdot\operatorname{sgn}(x_k)|x_k|^{p-1}$

עבור $p=2$, $q=2$ נקבל מקרה פרטי - אי שוויון Cauchy-Schwartz :

$\langle x,y\rangle\le\|x\|_2\|y\|_2$, שוויון $\iff$ קיים $t\in\mathbb{R}$, $x=t\cdot y$

לכל $x\in\mathbb{R}^n$ קיים $p\in\mathbb{R}^n$, $\|p\|_2=1$, $\langle x,p\rangle=\|x\|_2$ ($p=\frac{1}{\|x\|_2}\cdot x$).

$$\|x+y\|_2=\langle x+y,p\rangle=\langle x,p\rangle+\langle y,p\rangle\overset{C-S}{\le}\|x\|_2+\|y\|_2$$

אם $1<p<\infty$, $q=\frac{p}{p-1}$ אזי - לכל $x\in\mathbb{R}^n$ קיים $z\in\mathbb{R}^n$, $\|z\|_q=1$, $\langle x,z\rangle=\|x\|_p$.

$$\|x+y\|_p=\langle x+y,z\rangle=\langle x,z\rangle+\langle y,z\rangle\overset{H}{\le}\|x\|_p\|z\|_p+\|y\|_p\|z\|_q=\|x\|_p+\|y\|_p$$

תרגיל: (i) $$\|x\|_p\xrightarrow[p\to\infty]{}\max_{1\le k\le n}|x_k|:=\|x\|_\infty$$

(ii) $\|\cdot\|_\infty$ נורמה.

טענה: אם $\|\cdot\|$ נורמה על $\mathbb{R}^n$ אזי קיים $M>1$: $\frac{1}{M}\|x\|_2\le\|x\|\le M\cdot\|x\|_2$,

---

קבוצות פתוחות וסגורות ב-$\mathbb{R}^n$: $|\cdot|=\|\cdot\|_2$

סימונים - כדור פתוח: $B(a,r):=\{x\in\mathbb{R}^n:|x-a|<r\}$.

מרכז $a\in\mathbb{R}^n$; רדיוס $r>0$

כדור פתוח מנוקב: $B^*(a,r):=B(a,r)\setminus\{a\}$

ספירה: $S(a,r):=\{x\in\mathbb{R}^n:|x-a|=r\}$

לבנה - תיבה: $R:=\prod_{k=1}^{n}I_k=\{x\in\mathbb{R}^n:x_k\in I_k,\ 1\le k\le n\}$ (I_k קטעים)

הגדרה - $A\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה אם לכל $a\in A$ קיים $r>0$ כך ש-$B(a,r)\subseteq A$.

$E\subseteq\mathbb{R}^n$ סגורה אם $\mathbb{R}^n\setminus E$ פתוחה.
$\overset{\shortparallel}{E^c}$

משפט: (i) איחוד כלשהו של קבוצות פתוחות היא פתוח.

(ii) חיתוך סופי של קבוצות פתוחות היא פתוח.

הוכחה: (i) נניח כי Σ קבוצה, $U_\sigma\subseteq\mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה לכל $\sigma\in\Sigma$,

האיחוד של $\{U_\sigma:\sigma\in\Sigma\}$, $U:=\bigcup_{\sigma\in\Sigma}U_\sigma$,

הוכחה ש-U פתוחה - * אם $a\in U$ אזי קיים $\sigma\in\Sigma$ כך ש-$a\in U_\sigma$.

* U_σ פתוחה ולכן קיים $r>0$, $B(a,r)\subseteq U_\sigma$ לכן $B(a,r)\subseteq U_\sigma\subseteq U$.

(ii) נניח כי $U_1,\dots,U_N$ פתוחות. נוכיח כי $\bigcap_{k=1}^{N}U_k$ פתוחה.

אם $a\in\bigcap_{k=1}^{N}U_k$ אזי, לכל k: $a\in U_k$ (פתוחה) וקיים $r_k>0$: $B(a,r_k)\subseteq U_k$.

$$r=\min_{1\le k\le n}r_k>0\implies B(a,r)\subseteq B(a,r_k)\subseteq U_k\implies B(a,r)\subseteq\bigcap_{k=1}^{N}U_k\quad\forall 1\le k\le n:$$

תרגילים: 1. $\langle x,y\rangle:=\sum_{k=1}^{n}x_ky_k$ מ.פ. על $\mathbb{R}^n$.

2. $[x,y]$ מ.פ. על $\mathbb{R}^n$ $\iff$ קיימת מטריצה סימטרית חיובית כך ש-$[x,y]=\langle Ax,y\rangle$.

הוכחה: אלגברה לינארית.

$\Leftarrow$ (ii) נכשל עבור חיתוך אינסופי: ב-$\mathbb{R}^1$ - $U_k=(-\frac{1}{k},\frac{1}{k})\rightarrow\bigcap_{k=1}^{\infty}U_k=\{0\}$

* $A=(0,1]$ לא פתוחה ($1\in A$ אבל אין $\varepsilon>0$ $B(1,\varepsilon)\subseteq A$)

$A^c=(-\infty,0]\cup(1,\infty)$ לא סגורה כי A^c לא פתוחה. $0\in A^c$ ואין $\varepsilon>0$ $B(0,\varepsilon)\subseteq A^c$

* $U_k=(0,1+\frac{1}{k})$ פתוחה $\bigcap_{k=1}^{\infty} U_k=(0,1]$.

משפט (משלים): (i) חיתוך כלשהו של קב' סגורות הינו סגור.

(ii) איחוד סופי של קב' סגורות הינו סגור.

הוכחה: נשתמש בחוקי De-Morgan :

$$\left(\bigcup_{\alpha\in\Sigma} A_\alpha\right)^c=\bigcap_{\alpha\in\Sigma} A_\alpha^c$$

$$\left(\bigcap_{\alpha\in\Sigma} A_\alpha\right)^c=\bigcup_{\alpha\in\Sigma} A_\alpha^c$$

(i) יהיו $\{E_\alpha:\alpha\in\Sigma\}$ קבוצות סגורות, אזי - $\{E_\alpha^c:\alpha\in\Sigma\}$ קבוצה פתוחה.

ולכן $\bigcup_{\alpha\in\Sigma} E_\alpha^c$ פתוחה.

$\xLeftarrow{\text{הגדרה}}$ $\bigcap_{\alpha\in\Sigma} E_\alpha \overset{D-M}{=} \left(\bigcup_{\alpha\in\Sigma} E_\alpha^c\right)^c$ סגורה

(ii) נניח כי $E_1,\dots,E_N$ סגורות, אז $E_1^c,\dots,E_N^c$ פתוחות.

ולכן $\bigcap_{k=1}^{N} E_k^c$ פתוחה.

$\Leftarrow$ $\bigcup_{k=1}^{N} E_k \overset{D-M}{=} \left(\bigcap_{k=1}^{N} E_k^c\right)^c$ סגורה.

פנים של קבוצה:

הגדרה: $A\subseteq\mathbb{R}^n$ הפנים של A - $Int(A)=A^\circ:=\{x\in A:\ \text{קיים } r_0\ B(x,r)\subseteq A\}$

טענה: A° קבוצה פתוחה.

הוכחה: נניח כי $x\in A^\circ$, $r>0$ כך ש- $B(x,r)\subseteq A$, נוכיח כי $B(x,r)\subseteq A_0$:

אם $y\in B(x,r)$ אזי $|x-y|<r$, קיים $\delta>0$ כך ש- $|x+y|+\delta<r$.

(!) $\Leftarrow$ $z\ni B(y,\delta)\subseteq B(x,r)\in A$ $\xLeftarrow{\text{לפי הגדרה}}$ $y\in A^\circ$.

$$|z-x|\le|z+y|+|y-x|<\delta+|y-x|<r$$

תרגיל: $B(x,r)$ קבוצה פתוחה.

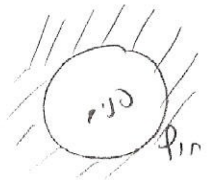
* $n=1$ $\Leftarrow$ $\mathbb{Q}^\circ=\phi$ (כל קטע מכיל גם אי - רציונלי)

$(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})^\circ=\phi$ (כל קטע מכיל גם רציונלי)

$[0,1]^\circ=(0,1)$: $[0,1]$ קבוצה סגורה, $[0,1]^c=(-\infty,0)\cup(1,\infty)$,

תרגיל: $S(a,r)$ קבוצה סגורה.

שפה של קבוצה: $A \subseteq \mathbb{R}^n$,



$\partial A = \mathbb{R}^n \setminus (A^\circ \cup (A^c)^\circ)$ סגורה (כי משלימה של קבוצה פתוחה)

$\partial B(a,r) = S(a,r)$

n=1: $\partial \mathbb{Q} := \mathbb{R} \setminus (\underbrace{\mathbb{Q}^\circ \cup (\mathbb{Q}^c)^\circ}_{=\emptyset}) = \mathbb{R}$ (כמו למצוא קבוצת נקודות הצטברות ל-$\mathbb{Q}$).

$\partial \mathbb{R} := \mathbb{R} \setminus (\underbrace{\mathbb{R}^\circ \cup \emptyset^\circ}_{=\mathbb{R}}) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{R} = \emptyset$

נקודת הצטברות של A: $A \subseteq \mathbb{R}^n$

$x \in \mathbb{R}^n$ נקודת הצטברות של A אם לכל $r>0$ $B^*(x,r) \cap A \neq \emptyset$

$\Leftarrow$ לכל $r>0$ $\#B(x,r) \cap A = \infty$

$L(A) = A' := \{$נקודות הצטברות של A$\}$.

דוגמאות- $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$

$(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})' = \mathbb{R}$

$(0,1)' = [0,1]$

$\{1,2,3\}' = \emptyset$

$A \subseteq \mathbb{R}^n$, $x \in A$ נקודה מבודדת אם $x \notin A'$ זאת אומרת קיים $r>0$ $\{x\} = B(x,r) \cap A$.

טענה: $A \setminus A'$ לכל היותר בת-מנייה.

הוכחה: לכל $x \in A \setminus A'$ קיים $r_x > 0$ כך ש- $A \cap B(x, r_x) = \{x\}$.

$A \setminus A' \longrightarrow \{$כדורים פתוחים$\}$

קיים $q_x \in B(x, r_x) \cap \mathbb{Q}^n$

נגדיר העתקה מקבוצת נקודות מבודדות ל-$\mathbb{Q}^n$: $A \setminus A' \xrightarrow[1-1]{} \mathbb{Q}^n$

העתקה זו חח"ע כיוון שהכדורים זרים.