# 26/6 שיעור 16 בחדו"א - עם אהרונסון

$A\subseteq\mathbb{R}^d$ פתוחה אם לכל $x\in A$ קיים רדיוס, $B(x,r)\subseteq A$

$E\subseteq\mathbb{R}^d$ סגורה אם $E^c$ פתוחה.

נקודה פנימית. ← $Int(A)=A^\circ:=\{x\in A:\exists r>0,\ B(x,r)\subseteq A\}$

תרגיל: $Int(A)=\bigcup\limits_{\substack{U\subseteq A\\ U \text{ פתוחה}}} U$

$Ext(A)=Int(A^c)$ מנותק!
החלק החיצוני, הפנים הפנימי

קבוצה סגורה $\mathbb{R}^d\setminus(Int(A)\cup Ext(A))=\partial A$
שפה של $A$

* $A=\mathbb{Q}\cap[0,1]$ יש אי-רציונליים בכל קטע. $Int(A)=\emptyset$

$Ext(A)=(-\infty,0)\cup(1,\infty)$

$\partial A=[0,1]$

$x\in Ext(A)$
$\Downarrow$
(i) $x\in A^c$ — $x\in[0,1]^c$ / $x\in[0,1]\setminus\mathbb{Q}$
(ii) $\exists r>0,\ (x-r,x+r)\subseteq A^c$

* $A=\{1,2,3\}$ $Int(A)=\emptyset$

$Ext(A)=A^c$

$\partial A=A$

נקודות הצטברות של $A$:

$x\in\mathbb{R}^d$ כך שלכל $r>0$ קיים $x\neq a\in A$. $|x-a|<r$

$L(A):=\{\text{נקודות הצטברות}\}$

$\bar{A}:=\{x\in\mathbb{R}^d:\exists a_n\in A,\ a_n\xrightarrow[n\to\infty]{}x\}$
$\Updownarrow$
$|a_n-x|\xrightarrow[n\to\infty]{}0$

$x\in L(A)$
$\Downarrow$
$\exists a_n\in A$ $a_n\neq a_{n'}$ לכל $n\neq n'$
$a_n\to x$.

$L(A)\overset{?}{\subseteq}\bar{A}$, $L(A)\neq\bar{A}$ דוגמא: $A=\{1,2,3\}$ $L(A)=\emptyset$ אין נקודות הצטברות. $\bar{A}=A$

טענות

– $\bar{A}=A\cup L(A)$. אם $a_n\in A$, $a_n\to x$ אז:
$x\in L(A) \Leftarrow \#\{a_n:n\geq 1\}=\infty$

$x\in A \Leftarrow \#\{a_n:n\geq 1\}<\infty$.

– $\bar{A}=A\cup\partial A$ וגם $\bar{A}=Ext(A)^c$

אין צורך שהאיבר הבא "נמצא באמצע".

הוכחה ב: $x\in Ext(A)^c \Leftarrow x\notin Int(A^c) \Leftarrow$ לכל $r_n=\frac{1}{n}$ קיים $a_n\in A$, $|x-a_n|<r_n$

$\Leftarrow a_n\in A$, $a_n\to x$. $x\in\bar{A}$.

ג: $x\in\bar{A} \Leftarrow$ קיים $a_n\in A$, $a_n\to x$. צ"ל: $x\notin Ext(A)$ אבל $x$ לא פנימי של $A^c$.

אם $x\in Ext(A)$ אז קיים $r>0$, $B(x,r)\subseteq A^c$
$\phantom{x\in} = Int(A^c)$

$B(x,r)\ni a_n$ ... סתירה לכך ש $B(x,r)\cap A=\emptyset$

$\bar{\bar{A}} = A$ גבול של גבולות הוא גבול

**משפט:** $A$ סגורה $\iff$ $A=\bar{A}$.

**הוכחה:** $\Leftarrow$: $\bar{A}=A$ סגורה, כי הוא המשלים של פתוחה.

$\Rightarrow$ $A$ סגורה $\Leftarrow$ $Ext(A)=A^c$ $\Leftarrow$ $A=\bar{A}$.

$\bar{A}$ נקרא הסגור של $A$

**התכנסות של סדרות ב-$\mathbb{R}^d$:**

$$\mathbb{R}^d \ni x_n = (x_1(n), x_2(n), \dots, x_d(n))$$

**הגדרה:** $x(n) \to x \in \mathbb{R}^d$ אם $|x(n)-x| \to 0$.

**משפט (i):** $x(n)\to x \iff x_k(n) \to x_k$ לכל $1\le k\le d$

(ii) $\exists x\in\mathbb{R}^d \; x(n)\to x \iff |x(n)-x(n')| \underset{n,n'\to\infty}{\longrightarrow} 0$ טיעון 1 ומשמש. כיוון שני יש סדרת קושי, גם גבול

בולצאנו ויירשטראס (iii) לכל סדרה חסומה ב-$\mathbb{R}^d$, תת-סדרה מתכנסת:

$x(n)\in B(0,R)$ לכל $n$.

$$x(n) = (x_1(n), x_2(n)) \in B(0,R)$$

$$\sqrt{x_1(n)^2+x_2(n)^2} \le R \text{ לכל } n.$$

$$\Downarrow$$

$$|x_1(n)|, |x_2(n)| \le R$$

לפי ש-B קיים $n_k\to\infty$,

$x_1\in\mathbb{R}$,

$$x_1(n_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} x_1$$

$|x_2(n_k)| \le R$ לפי ש-B קיים

$x_2(m_\ell) \xrightarrow[\ell\to\infty]{} x_2$ $\quad x_2\in\mathbb{R}$ $\quad m_\ell = n_{k_\ell} \to \infty$

וגם $x_1(m_\ell) = x_1(n_{k_\ell}) \to x_1$

**קבוצה קומפקטית**

$K\subseteq\mathbb{R}^d$ קומפקטית אם לכל סידרה ב-$K$ יש תת-סידרה המתכנסת לאיבר של $K$.

**דוגמאות:** - $A\subset\mathbb{R}^d$ סופית $\Leftarrow$ קומפקטית.

- אם $A$ סגורה וחסומה (מוכל בכדור) אז $A$ קומפקטית לפי בולצאנו ויירשטראס יש את סדרה מתכנסת ובגלל שהיא חסומה לב-$A$.

**משפט ש-B:** $A\subseteq\mathbb{R}^d$ קומפקטית $\iff$ $A$ סגורה וחסומה.

$\Leftarrow$ ברור (נציג..)

$\Rightarrow$ אם $a_n\to x$, $a_n\in A$ $\Leftarrow$ $x\in A$ לכן $\bar{A}=A$ ו-$A$ סגורה (הסדרה המתכנסת כי אז קומפקטית מתכנסת

היא לא היתה חסומה. אין תת-סידרה מתכנסת

אם $A$ לא חסומה קיים $a_n$, $|a_n|\to\infty$ ולא קיים $n_k$ ש-$a_{n_k}\to x\in\mathbb{R}^d$

מרחק בין קבוצות: $\emptyset\neq A,B\subseteq\mathbb{R}^d$ $\quad d(A,B):=\inf\{|x-y| : x\in A, y\in B\}$

$d(A,B)>0 \Rightarrow A\cap B=\emptyset$ - הקבוצות זרות.

**טענה**: אם $A$ קומפ' ו־$B$ סגורה, $A\cap B=\emptyset$, אזי $d(A,B)>0$.

**הוכחה**: נוכיח כי קיימים $a\in A$, $b\in B$

$|a-b|=d(A,B)$.

קיימים $a_n\in A$, $b_n\in B$ כך ש־ $|a_n-b_n|\to d(A,B)$.

קיים $n_k\to\infty$, $a\in A$ כך ש־ $a_{n_k}\to a$

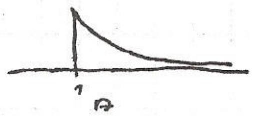
- $\{b_{n_k}\}$ סדרה חסומה כי: נניח: $A\subseteq B(0,R)$, $A$ חסומה כי היא קומפקטית.

$|b_n|\le|b_n-a_n|+|a_n|\le\sup_n|a_n-b_n|+R\to$ כי זה הכדור שמכיל את $A$. החסם של $A$.

לפי ש־$B$ קיים $k_\ell$, $b\in\mathbb{R}^d$ $\quad b_{n_{k_\ell}}\to b$ ($b\in B$ סגורה)

$|a-b|\leftarrow|a_{n_{k_\ell}}-b_{n_{k_\ell}}|\longrightarrow d(A,B)$

מה קורה כאשר $A,B$ סגורות שתיהן? $d(A,B)\overset{?}{>}0$ (הורדנו את עניין הקומפקטיות)



$\mathbb{R}^2\supseteq B:=\{(x,\frac{1}{x}) : x\ge 1\}$

סגורה. ⇐ למה לא שלה חסם?

$A=\{(x,0) : x\in\mathbb{R}\}\subseteq\mathbb{R}^2$ סגורה

$d(A,B)\le|(x,\frac{1}{x})-(x,0)|=\frac{1}{x}\quad\forall x\ge 1$

$\to 0$

נניח כי $A\subseteq\mathbb{R}^d$:

<u>כיסוי פתוח של $A$</u>:

אוסף $\Lambda$ של קבוצות פתוחות ב־$\mathbb{R}^d$ שמכסה את $A$, כלומר $\bigcup_{U\in\Lambda}U\supseteq A$

תת כיסוי $\Lambda'$ נקרא <u>סופי</u> אם $\#\Lambda'<\infty$

<u>משפט Heine-Borel</u>: קבוצה $A\subseteq\mathbb{R}^d$ קומפקטית $\Leftrightarrow$ לכל כיסוי פתוח של $A$ יש תת־כיסוי סופי.

<u>הוכחה $\Leftarrow$</u>: $k\supseteq k_1\supseteq k_2\supseteq\ldots$ לכל אחד מהם, אין תת־כיסוי סופי

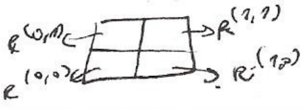
כמו קנטור $k_n\downarrow\{x\}$. $\quad\emptyset\neq x\in U\in W$ (קבוצה פתוחה בכיסוי)

$\Rightarrow\exists r\quad B(x,r)\subseteq U$

$\exists n\ \ni k_n\subseteq B(x,r)\subseteq U$

$\varepsilon=(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_d)\in\{0,1\}^d\qquad R=\prod_{k=1}^{d}I_k\qquad I_k=[a_k,b_k]\qquad I=[a,b]$, $I^{(0)}=[a,\frac{a+b}{2}]$, $I^{(1)}=[\frac{a+b}{2},b]$

$R^{(\varepsilon)}=\prod_{k=1}^{d}I_k^{(\varepsilon_k)}$




$\boxed{R=\bigcup_{\varepsilon\in\{0,1\}^d}R^{(\varepsilon)}}$

קוטר של קבוצה:

$$\mathrm{diam}(A) := \sup\{|x-y| : x,y\in A\}$$

קוטר של כדור: $\mathrm{diam}\,B(x,r) = 2\cdot r$

$$\mathrm{diam}(R^{(\varepsilon)}) = \tfrac{1}{2}\cdot \mathrm{diam}(R)$$

הוכחה של HB:

נניח כי $U$ כיסוי פתוח של $A$ קומפ', ללא תת-כיסוי סופי.

קיימת תיבה $A\subseteq R$. ולכן תהיה $A = \bigcup_{\varepsilon\in\{0,1\}^d} A\cap R^{(\varepsilon)}$ , $\varepsilon\in\{0,1\}^d$

$A_1 := A\cap R^{(\varepsilon)}$ ש ללא תת-כיסוי סופי.

$A$ קומפקטית ללא תת-כיסוי סופי ש $A\supseteq A_1$, ו $A_1$ ללא תת-כיסוי סופי

$$\mathrm{diam}\,A_1 \le \frac{\mathrm{diam}(R)}{2}$$

קיימת ... קומפ' ללא תת-כיסוי סופי. $A\supseteq A_1 \dots \supseteq A_{n-1} \supseteq A_n$

$A_n = A\cap R_n$

$R_n = R_{n-1}^{(\varepsilon^{(n)})}$

$$\mathrm{diam}(A_n) \le \frac{\mathrm{diam}(R)}{2^n}$$

קיים $x\in A$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{x\}$

הוכחה: $\mathrm{diam}(\bigcap_n A_n) = 0 \Leftarrow \#\bigcap_n A_n \le 1$ צ"ל: $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$.

- $A_n \neq \emptyset$ לכל $n$, קיים $a_n\in A_n$ , $|a_{n+k} - a_n| \le \mathrm{diam}(A_n) \le \frac{\mathrm{diam}(R)}{2^n}$ , $n,k\ge 1$

מה סדרת קושי, $\Leftarrow$ קיים $x\in\mathbb{R}^d$, $a_n \to x$, $a_n\in A$, $x\in A$ מסגירות.

$a_n\in A_N \quad \forall n\ge N$

$\Rightarrow \forall N \quad x\in A_N$

ולכן זה מוכיח: קיים $x\in A$ ש $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{x\}$

$\exists r \quad B(x,r)\subseteq U$

$A_n \subseteq B(x,r)$

כאשר $\mathrm{diam}(A_n) < r$ #