30/6/08 חדו"א 2 - הרצאה 16

העתקות רציפות

גבולות:

תהי קבוצה $X\subset\mathbb{R}^n$, x_0 נק' הצטברות של X. $f:X\to\mathbb{R}^m$

נניח שקיים $a\in\mathbb{R}^m$ כך ש- $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \ 0<|x-x_0|<\delta,\ x\in X \Rightarrow$

$$|f(x)-a|<\varepsilon$$

אז $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} f(x)=a$ $\left(\Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} |f(x)-a|=0\right)$

הערה: אם $x_0\in int(X)$ אז $\lim\limits_{x\to x_0} f(a)=a$

דוגמאות: $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^1$, $x_0=0$

"גבול כפול" $\lim\limits_{(x,y)\to 0} f(x,y)$

"גבולות חוזרים" $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right)$ או $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right)$

(1)
$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & ,(x,y)\neq 0\\ 0 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$$

גבולות חוזרים: (קובעים y מסוים)

$\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=0,\ \forall y$

$\Leftarrow$

$\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right)=0$

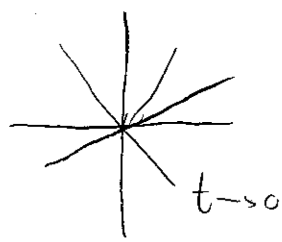
$\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=0$

גבול כפול:

$\lim\limits_{(x,y)\to 0} f(x,y)$ לא קיים

נסמן:

$f(t,t)=\frac{t^2}{2t^2}=\frac{1}{2}\not\to 0$



(2)
$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^4+y^2} & ,(x,y)\neq 0\\ 0 & ,(x,y)=0\end{cases}$$

$a,b\in\mathbb{R}$, $a^2+b^2\neq 0$

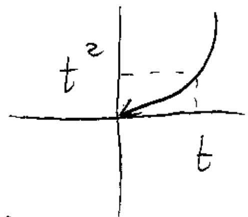
(עבור קווים ישרים) $\begin{cases} x=ta \\ y=tb \end{cases}$

$$f(ta,tb)=\frac{t^3a^2b}{t^4a^4+t^2b^2}=\frac{ta^2b}{t^2a^4+b^2}\quad (t\neq 0)$$

$$\lim_{t\to 0} f(ta,tb)=0$$

עבור פרבולה: $x=t$, $y=t^2$, $t\to 0$

$$f(t,t^2)=\frac{t^2\cdot t^2}{t^4+t^4}=\frac{1}{2}\not\to 0$$



$\Leftarrow$ $\lim\limits_{(x,y)\to 0} f(x,y)$ לא קיים!

(כלומר מפרבולה פונקציה מקבלת ערך קבוע - $\frac{1}{2}$)

$$f(x,y)=\begin{cases} x+y\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$ (3)

• גבול כפול

$$\lim_{(x,y)\to 0} f(x,y)=0$$

נבדוק לפי: $\forall\varepsilon\ \exists\delta:\ x^2+y^2<\delta^2 \overset{?}{\Rightarrow} |f(x,y)|<\varepsilon$

נניח $x^2+y^2<\delta$ כלומר $|x|,|y|<\delta$

$|f(x,y)|\le|x|+|y|<2\delta$ ($\sin\frac{1}{x}<1$)

$x\neq 0$ ($\delta=\frac{1}{2}\varepsilon$)

• גבולות חוזרים

$\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$ לא קיים! ($y\neq 0$)

(כי ל- $\sin\frac{1}{x}$ אין גבול) $\Leftarrow$ $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$ לא מוגדר $\Rightarrow$ לא קיים!

<u>הגדרה</u>: $X\subset\mathbb{R}^n$, $x_0\in X$ נק' הצטברות. $f:X\to\mathbb{R}^m$

f רציפה ב- x_0 אם $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} f(x)=f(x_0)$

<u>הערות</u>

(1) <u>הסכם</u>: x_0 נקודה מבודדת של X : (לא נק' הצטברות)

$\Leftarrow$ כל העתקה $f:X\to\mathbb{R}^m$ רציפה בנק' x_0.

(ט) $\{e_k\}$ בסיס אורתונורמלי ב- $\mathbb{R}^m$

$$f(x)=\sum_{k=1}^{m} f^k(x)\,e_k$$

$y^1,\dots,y^m \qquad y\in\mathbb{R}^m$

$$y=\sum_{k=1}^{m} y^k e_k$$

<u>טענה</u>: f רציפה ב- x_0 אמ"מ כל פונקציות f^k רציפות ב x_0.

<u>הוכחה</u>:

1) $\{f^k\}$ רציפות ב- x_0 $\Leftarrow$ $f(x)-f(y)=\sum_{k=1}^{m}\left(f^k(x)-f^k(y)\right)e_k$

$\Leftarrow$

$$|f(x)-f(y)|\le\sum_{k=1}^{m}|f^k(x)-f^k(y)|\xrightarrow[y\to x_0,\,x\to x_0]{}0$$

כיוון שני 2) נניח ש- f רציפה ב- x_0.

$$f^k(x)=\langle f(x),e_k\rangle$$

$$f^k(x)-f^k(x_0)=\langle f(x)-f(x_0),e_k\rangle \quad \text{(כי זה בסיס אורתו')}$$

$$|f^k(x)-f^k(x_0)|=|\langle f(x)-f(x_0),e_k\rangle|\overset{CS}{\le}|f(x)-f(x_0)|\cdot\overbrace{|e_k|}^{=1}=|f(x)-f(x_0)|\longrightarrow 0$$

לפי רציפות של f. $\square$

<u>סימון</u>: $C(X)=C(X,\mathbb{R}^m)$ - אוסף של הרציפות מ- X ל- $\mathbb{R}^m$.

f רציפה בכל נק' $x_0\in X$ $\Leftarrow$ f רציפה ב X

<u>דוגמא</u>: אורך = נורמה אוקלידית $x\longmapsto|x|$

$$\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^1_+=\{y:\,y\ge 0\}$$

$x\to x_0$ $\Leftarrow$ $|x-x_0|\to 0$ (הגדרה של התכנסות)

<u>תכונות מקומיות</u> (של פונ' רציפות)

<u>טענה</u>: (1) אם f רציפה ב x_0 $\Leftarrow$ f חסומה בסביבה של x_0:

כלומר $\exists M<\infty,\ \exists U_{x_0}\ |f(x)|<M,\ \forall x\in U_{x_0}\cap X$

(2) $m=1$, $f:X\to\mathbb{R}^1$ רציפה ב- x_0 ו- $f(x_0)>0$ (או <0)

אז $\exists U_{x_0}\ \forall x\in U_{x_0}\cap X\ \ f(x)>0\ (<0)$

(3) f,g רציפות ב- x_0 $\Leftarrow$ $\alpha f+\beta g$ $(\alpha,\beta\in\mathbb{R}^1)$ גם רציפה

ב- x_0 ו- $(m=1)$ $f\cdot g$ רציפה ב x_0.

• $g(x_0)\neq 0$ $\Leftarrow$ $\frac{f}{g}$ רציפה ב x_0.

(4) $X\subset\mathbb{R}^n$ $\quad f: X\to\mathbb{R}^m$

$Y\subset\mathbb{R}^k$ $\quad \varphi: Y\to X$, $\quad \varphi(y_0)=x_0$

f רציפה ב-x_0 , φ רציפה ב-y_0 $\Leftarrow$ $f\circ\varphi$ רציפה ב-y_0.

<u>מסקנה</u>: $1\le k\le n$, $x\mapsto x^k$

פונקציות רציפות $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^1$

$\Leftarrow$ $x^1\cdot x^2\cdots x^k$ פונקציה רציפה ב-$\mathbb{R}^n$

$\Leftarrow$ כל פולינום במשתנים $x^1,\dots,x^k$ הוא פונ' רציפה ב-$\mathbb{R}^n$

<u>תכונות גלובליות</u>

$K\subset\mathbb{R}^n$ קבוצה קומפקטית, כלומר לכל סדרה $\{x_j\}\subset K$ קיימת תת סדרה מתכנסת $\Leftarrow$ K סגורה וחסומה.

<u>משפט Cantor</u>: $f\in C(K,\mathbb{R}^m)$

$\Leftarrow$ f רציפה במידה שווה:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x,y\in K\ |x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$$

<u>משפט Weierstrass</u>:

(1) $f\in C(K,\mathbb{R}^m)$ אז f חסומה ב-K:

$$\exists M<\infty\ \forall x\in K\ |f(x)|<M$$

(2) $f\in C(K,\mathbb{R}^1)$ $\Leftarrow$ f מקבלת את המקסימום ואת המינימום:

$$\exists x_1\in K\ f(x_1)=\sup_K f = \max_K f \ , \quad \exists x_2\in K\ f(x_2)=\inf_K f = \min_K f$$

(ההוכחות זהות להוכחות בחדו"א 1 עבור פונקציות של משתנה אחד)

<u>הערה</u>: $\varphi\in C(K,\mathbb{R}^m)$ $\Leftarrow$ $|\varphi|\in C(K,\mathbb{R}^1)$

φ זו העתקה רציפה וגם $|\ |$ רציפה (לפי דוגמא) לכן ההרכבה גם רציפה.

<u>העתקות ליניאריות</u>

$A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$

$$\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}^1\ \forall x,y\in\mathbb{R}^n\ A(\alpha x+\beta y)=\alpha A(x)+\beta A(y)$$

<u>הסכם</u>: $Ax=A(x)$

$AB=A\circ B$ (כך נהוג לכתוב)

(מטריצה של העתקה לינארית:)

$e_1,\dots,e_n$ בסיס ב $\mathbb{R}^n$, $f_1,\dots,f_m$ בסיס ב $\mathbb{R}^m$

$$x=\sum_{j=1}^n x^j e_j$$

$$Ax=\sum_{j=1}^n x^j Ae_j$$

$Ae_j\in\mathbb{R}^m$ לכן ניתן לכתוב

$$Ae_j=\sum_{i=1}^m a_j^i f_i$$

$$a_j^i=(Ae_j)^i=\langle Ae_j,f_i\rangle$$

$$Mat(A)=[A]=\begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1\\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2\\ a_1^m & a_2^m & \dots & a_n^m\end{bmatrix}$$

$L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ - אוסף של כל ההעתקות הלינאריות מ-$\mathbb{R}^n$ ל-$\mathbb{R}^m$

$L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ הם גם מרחב לינארי (ממימד mn)

$$L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)\underset{\text{(איזומורפי)}}{\cong}\mathbb{R}^{nm}$$

$A\in L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$, $B\in L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ אזי $A\cdot B\in L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$

$$Mat(A\cdot B)=Mat(A)\,Mat(B)$$

<u>טענה</u>: $L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)\subset C(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$

<u>הוכחה</u>:

$$|Ax-Ay|=\left|\sum_{j=1}^n (x^j-y^j)Ae_j\right|\le\sum_{j=1}^n|x^j-y^j|\cdot|Ae_j|\ \textcircled{\le}$$

נגדיר $M:=\max_{1\le j\le n}|Ae_j|$

$$\textcircled{\le}\ M\sum_{j=1}^n|x^j-y^j|\overset{CS}{\le}M\sqrt{n}\,|x-y|\qquad\left(\sum_1^n|a_j|\le\sqrt{\sum_1^n 1}\cdot\sqrt{\sum_1^n(a^j)^2}=\sqrt{n}\cdot|a|\right)$$

<u>מסקנה</u>: $\sup_{|x|\le1}|Ax|=\max_{|x|\le1}|Ax|<\infty$

$$A(tx)=tA(x)$$

$$|A(tx)|=|t|\cdot|A(x)|\qquad t\in\mathbb{R}^1,\ x\in\mathbb{R}^n$$

$$\max_{|x|\le1}|Ax|=\max_{|x|=1}|Ax|$$

$|x|<1$, $x=|x|\cdot\left(\frac{x}{|x|}\right)$ "$\tilde{x}$", $|\tilde{x}|=1$

$$|Ax|=|x|\left|A\left(\frac{x}{|x|}\right)\right|\qquad |Ax|<|A\tilde{x}|$$

<u>מסקנה</u>: $\max_{|x|\le1}|Ax|=\max_{|x|=1}|Ax|$

<u>מסקנה</u>: $\forall x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}\quad(*)\ |Ax|\le|x|\cdot\max_{|y|=1}|Ay|$

הוכחה של (*) :

$$|\tilde{x}| = 1 \ , \quad \tilde{x} = \frac{x}{|x|}$$

$$x = |x| \cdot \tilde{x}$$

$$|Ax| = |x| \cdot |A\tilde{x}| \le |x| \cdot \max_{|y|=1} |Ay|$$

<u>הגדרה</u> : $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

$$\|A\| \overset{def}{=} \max_{|x|=1} |Ax| \qquad \text{(operator norm)}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : |Ax| \le \|A\| \cdot |x|$$

<u>ת.ק</u> :

- $\|A+B\| \le \|A\| + \|B\|$
- $\|A\| = 0 \iff A \equiv 0$

$$\|A \cdot B\| \le \|A\| \cdot \|B\|$$