העתקות לינאריות

$A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

$$\|A\| \overset{def}{=} \max_{|x|=1} |Ax| = \sup_{x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{|Ax|}{|x|}$$

$$\boxed{|Ax| \le \|A\|\cdot|x| \ , \ x\in\mathbb{R}^n}$$

- $\|A\|=0 \iff A=0$
- $\|A+B\| \le \|A\|+\|B\|$
- $\|A\cdot B\| \le \|A\|\cdot\|B\|$

הוכחה של אי-השוויון האחרון:

$$|(A\cdot B)x| = |A(Bx)| \le \|A\|\cdot|Bx| \le \|A\|\cdot\|B\|\,|x|$$

כלומר $|ABx| \le \|A\|\cdot\|B\|\cdot|x|$

$$\Rightarrow \quad \|A\cdot B\| \le \|A\|\cdot\|B\|$$

טענה: אם $\mathrm{mat}A = [a_j^i]$ $\Leftarrow$ $\|A\|^2 \le \sum_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} (a_j^i)^2$

נורמה בריבוע של העתקה לינארית חסומה ע"י סכום ריבועי האיברים במטריצה של ההעתקה.

הוכחה:

$$y = Ax \in \mathbb{R}^m$$

$$|y|^2 = \sum_{i=1}^m (y^i)^2$$

$$\{f_i\} \subset \mathbb{R}^m \ , \ \{e_j\} \subset \mathbb{R}^n$$

$$x = \sum_{j=1}^n x^j e_j$$

$$Ax = \sum_j x^j A e_j$$

$$Ae_j = \sum_{i=1}^m a_j^i f_i \ , \quad a_j^i = \langle Ae_j, f_i\rangle \ , \quad y^i = \sum_{j=1}^n x^j a_j^i$$

$$(y^i)^2 = \Big(\sum_{j=1}^n x^j a_j^i\Big)^2 \le \sum_{j=1}^n (a_j^i)^2 \le \sum_{j=1}^n (a_j^i)^2 \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^n (x^j)^2}_{|x|^2}$$

$$(y^i)^2 \le \Big(\sum_{j=1}^n (a_j^i)^2\Big)|x|^2 \qquad \text{ק"ש}$$

$$\Rightarrow \quad |y|^2 = \sum_{i=1}^m (y^i)^2 \le \underbrace{\Big(\sum_{i,j} (a_j^i)^2\Big)}\cdot|x|^2$$

$$\Rightarrow \quad \|A\|^2 \le \longrightarrow$$

הערות:

(עובדה)

1) $$\sum_{i,j} (a_j^i)^2 = tr(\underbrace{A^*A}_{\in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)})$$

2) $$\sum_{i,j} (a_j^i)^2 \leq n\|A\|^2$$

תרגיל: לבדוק

3) עבור $n=1$ ההעתקה היא פונקציונל לינארי;

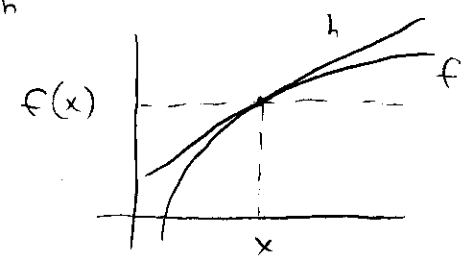
$$A \in L(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^m)$$
$$\sum_{i=1}^m (a^i)^2 = \|A\|^2$$

$$A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^1)$$
$$\|A\|^2 = \sum_{j=1}^n a_j^2$$

העתקות גזירות Differentiable maps

$U \subset \mathbb{R}^n$ פתוחה, $f: U \to \mathbb{R}^m$, $x \in U$

בחדו"א 1 הגדרנו נגזרת: (עבור $n=m=1$) $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$



$$y \mapsto f(x) + f'(x)(y-x)$$

$$f(y) - [f(x) + f'(x)(y-x)] = o(y-x), \; y \to x$$

עבור $y = x+h$: $h \mapsto f(x) + f'(x)h$

$\Leftarrow$ הפונקציה f גזירה בנק' x $\Leftrightarrow$ אפשר לקרב את f בסביבה של x ע"י פונקציה (העתקה) אפינית

$$f(x+h) = a + bh + o(h), \quad h \to 0$$
$$b = f(x), \quad a = f'(x)$$

הגדרה: $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ העתקה אפינית אם

$$g(x) = Ax + b, \quad A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), \quad b \in \mathbb{R}^m$$
$$g(h) = Ah + b, \quad h \in \mathbb{R}^n$$

הגדרה: f גזירה ב-x אם קיימת העתקה אפינית $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ כך ש

$$f(x+h) = g(h) + o(h), \quad h \to 0$$
$$f(x+h) = b + Ah + o(h), \quad h \to 0$$
$$b = f(x)$$

לכן ניתן לכתוב בצורה שקולה:

f גזירה בנק' x אם $\exists A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ כך ש

$$f(x+h) = f(x) + Ah + o(h) \quad , h \to 0 \quad h \in \mathbb{R}^n \qquad (1)$$

$$\iff \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - Ah}{|h|} = 0 \qquad (2)$$

• אם f גזירה בנק' $A \Leftarrow$ העתקה A יחידה.

$h = te \quad , \quad |e| = 1$

$$f(x+te) - f(x) = tAe + o(t)$$

$$Ae = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+te) - f(x)}{t}$$

$|e| = 1 \Rightarrow Ae$

$$Ah = |h| \cdot Ae \quad , h \in \mathbb{R}^n \ (h = |h| e)$$

$\Leftarrow$ אם A קיימת $\Leftarrow$ היא יחידה

<u>הגדרה</u>: הנגזרת של f בנק' x $Df(x) = A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

כלומר הנגזרת זו העתקה ולא מספר כמו במימד 1.

סימונים נוספים לנגזרת ($= f'(x) = df(x) = Df(x)$)

<u>מטריצה של $Df(x)$</u>

$\{e_j\} \subset \mathbb{R}^n \quad , \quad \{e'_i\} \subset \mathbb{R}^m$

$$\mathbb{R}^n \ni h = \sum_{j=1}^{n} h^j e_j$$

$$Df(x) h = \sum_{j=1}^{n} h^j Df(x) e_j$$

$$\underbrace{Df(x) e_j}_{\in \mathbb{R}^m} \overset{(3)}{=} \lim_{t \to 0} \frac{f(x+te_j) - f(x)}{t}$$

(ההעתקה פועלת על וקטור מ- $\mathbb{R}^n$ לכן מקבלים וקטור מ- $\mathbb{R}^m$)

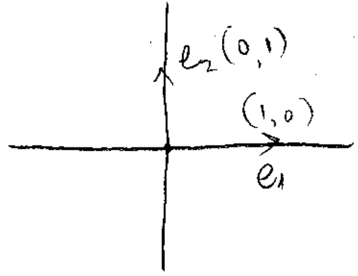
$$Df(x)_j^i = \langle Df(x) e_j , e'_i \rangle = \lim_{t \to 0} \frac{f^i(x+te_j) - f^i(x)}{t} =: \frac{\partial f^i}{\partial x_j}(x)$$

אז

$$\mathrm{Mat}[Df(x)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x_1}, & \dots, & \frac{\partial f^1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f^m}{\partial x_1}, & \dots, & \frac{\partial f^m}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \left[\frac{\partial f^i}{\partial x_j} \right]_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} = J_f(x)$$

מטריצה Jacobi של f בנק' x

$$\frac{df}{dx}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}$$



$x=0$
$n=2$
$m=1$
$(x_1,x_2)=(x,y)$

$$\frac{df}{dy}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}$$

$$[\mathrm{Mat}\, Df(0,0)]=\left[\frac{df}{dx}(0,0),\ \frac{df}{dy}(0,0)\right]$$

דוגמא: $f(x,y)=x^3+y^2$

$$\frac{df}{dx}(0,0)=(x^3)'_{x=0}=(3x^2)_{x=0}=0$$

<u>דוגמא 1</u>: $f(x)=Ax+b$

$b\in\mathbb{R}^m$, $A\in L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$

f גזירה בכל $\mathbb{R}^n$ ו- $Df(x)=A$

<u>דוגמא 2</u>: $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$

$$f(x,y,z)=\begin{pmatrix} x^2+\sin z \\ y+z^3 \\ 1+x+z \end{pmatrix}\begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{matrix}$$

$(x,y,z)=(1,1,1)$, נמצא את מטריצת יעקוביאן של הנגזרת:

$$\mathrm{Mat}[Df]=J_f(1,1,1)=\begin{bmatrix} 2 & 0 & \cos 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

בשורה השנייה לוקחים רק את $y+z^3$; גוזרים לפי x זה אפס, גוזרים לפי y זה 1 וגוזרים לפי z - $3z^2$ ובנק' 1 זה 3

<u>משפט 1</u>: $f,g:U\to\mathbb{R}^m$, $U\subset\mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה

נכתוב את מטריצת הנגזרת עבור נק' כללית -

$$J_f(x,y,z)=\begin{bmatrix} 2x & 0 & \cos z \\ 0 & 1 & 3z^2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

הערה, לא קשור

$x\in U$, f,g גזירות ב-x אז $f+g$ גזירה ב-x ו-

$D(f+g)(x)=Df(x)+Dg(x)$ (לינאריות)

<u>משפט 2</u>: $f:U\to\mathbb{R}^m$

f גזירה ב- $x\in U\subset\mathbb{R}^n$ אמ"מ כל פונקציה f^i $1\le i\le m$ גזירה בנק' x

(למשל בדוגמא 2 שלושת הפונ' f_1, f_2, f_3 גזירות)

הוכחה: f גזירה ב-x $\Longleftrightarrow$

$$\exists A\in L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)\qquad \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)-Ah}{|h|}=0$$

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f^i(x+h)-f^i(x)-(Ah)^i}{|h|}=0$$

$\Longleftrightarrow$ f^i גזירה ב-x ו- $h\to(Ah)^i$ נגזרת של f^i בנק' x.

□

ת.ב. נניח ש $f_1,\dots,f_n$ פונקציות גזירות מ-$\mathbb{R}^1$ ל-$\mathbb{R}^1$. אז $f(x)=\sum_{j=1}^{n} f_j(x^j)$ גזירה בכל x.

$x\in U$, $U\subset\mathbb{R}^n$, $f:U\to\mathbb{R}^m$

טענה 3: נניח f גזירה בנק' x ו- $\|Df(x)\|<C$

אז $\exists\delta\ \forall h\in\mathbb{R}^n,\ |h|<\delta\quad |f(x+h)-f(x)|\le C|h|$

מסקנה: f רציפה בנק' x

הוכחה של טענה 3: נבחר $\varepsilon=C-\|Df(x)\|>0$ כי הביטוי משמאל הוא $o(h)$

f גזירה ב-x: $\exists\delta\ \forall h,\ |h|<\delta\quad |f(x+h)-f(x)-Df(x)h|<\varepsilon|h|$

$$|f(x+h)-f(x)|\le|Df(x)h|+\varepsilon|h|\le\|Df(x)\|\cdot|h|+\varepsilon|h|=(\|Df(x)\|+\varepsilon)|h|=C|h|$$

אי שוויון המשולש   הגדרה של נורמה

□

[$\varphi(h)=o(|h|)$ אם $\forall\varepsilon\,\exists\delta\quad |h|<\delta\Rightarrow|\varphi(h)|<\varepsilon|h|$]

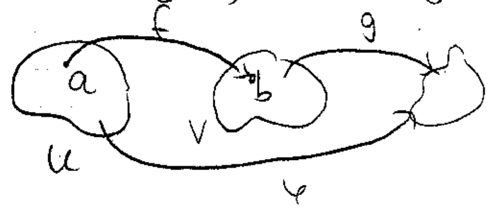
טענה 4: (Chain Rule)

$f:U\to\mathbb{R}^m$, $f(U)\subset V$, $g:V\to\mathbb{R}^k$, $\varphi=g\circ f$

U,V פתוחות, $a\in U$, $b=f(a)\in V$

f גזירה ב-a, g גזירה ב-b $\Longrightarrow$ φ גזירה ב-a ו-

$(D\varphi)(a)=Dg(b)\cdot Df(a)$



הוכחה: $A=Df(a),\ B=Dg(b)$

צ"ל להוכיח (1) $r_\varphi(x)\overset{def}{=}\varphi(x)-\varphi(a)-B\cdot A(x-a)\overset{??}{=}o(|x-a|)$

f גזירה ב-a: (2) $r_f(x)=f(x)-f(a)-A(x-a)=o(|x-a|)$

g גזירה ב-b: (3) $r_g(y)=g(y)-g(b)-B(y-b)=o(|y-b|)$

$$r_\varphi(x) = (g\circ f)(x) - (g\circ f)(a) - B\cdot A(x-a) = \underbrace{g(f(x)) - g(b) - B(f(x)-b)}_{= r_g(f(x))} +$$
$$+ \underbrace{B(f(x)-b) - BA(x-a)}_{= B r_f(x)}$$

כלומר קיבלנו

$$(4) \quad \boxed{r_\varphi(x) = r_g(f(x)) + B r_f(x)}$$

• נקבע $\varepsilon > 0$. נבחר $\eta > 0$ (לפי הגדרה של $\circ$) (3)

$$|y-b| < \eta \Rightarrow |r_g(y)| < \varepsilon |y-b| \qquad (5)$$

נבחר $\delta > 0$

$$|x-a| < \delta \Rightarrow \begin{cases} |f(x) - \overbrace{f(a)}^{=b}| < \eta & (6) \\ |r_f(x)| \overset{(2)}{<} \varepsilon |x-a| & (7) \end{cases}$$

רציפות של f בנקודה a

אי-שוויון המשולש

$$|r_g(f(x))| < \varepsilon |f(x)-b| = \varepsilon |f(x)-f(a)| = \varepsilon |A(x-a) + r_f(x)| \le$$

$$\varepsilon |A(x-a)| + \varepsilon |r_f(x)| \le \varepsilon \|A\| |x-a| + \varepsilon^2 |x-a|$$

$$|B r_f(x)| \le \|B\| |r_f(x)| \le \|B\| \cdot \varepsilon |x-a|$$

$$|r_\varphi(x)| \le \varepsilon \|A\| |x-a| + \varepsilon^2 |x-a| + \|B\| \cdot \varepsilon |x-a| = \varepsilon(\|A\| + \varepsilon + \|B\|) |x-a|$$

$\Leftarrow$ (1) מתקיים

<u>מסקנות</u>

$L \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ $\qquad D(L\circ f) = L\circ Df$

$M \in L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ $\qquad D(f\circ M) = Df \circ M$

משיעור הבא: $m = 1$

נדבר רק על פונקציות של כמה משתנים $f: U \to \mathbb{R}^1$