$U\subset\mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה, $p\in U$, $f:U\to\mathbb{R}^1$ גזירה בנק' p:

$Df(p)\in L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ (פונקציונל לינארי)

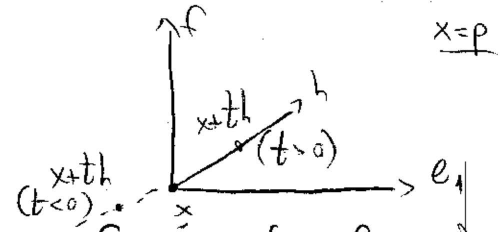
$h\in\mathbb{R}^n$, $\{e_j\}\subset\mathbb{R}^n$ בסיס

$$Df(p)h=\sum_{j=1}^{n}\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_j}(p)}\,h^j=\langle\nabla f(p),h\rangle$$

(ראינו בשיעור שעבר עבור העתקה - ורק זה עבור פונקציות - מקרה פרטי)

$$Df(p)h=\underbrace{\lim_{t\to 0}\frac{f(p+th)-f(p)}{t}}$$

נגזרת של f בכיוון h $(h\neq 0)$



(מסתכלים על הפונ' f רק על מישור על הישר בכיוון h ומקבלים פונקציה ממשתנה אחד)

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_j}(p)}=Df(p)e_j$$

נגזרת חלקית לפי x_j

הגדרה: גרדיאנט NABLA (גרדיאנט זו עמודה ונגזרת זו שורה)

$$\nabla f(p)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x_1}(p)\\ \vdots\\ \frac{\partial f}{\partial x_j}(p)\end{pmatrix}$$

(grad f)

Geometric properties of the gradient

1) אם $\langle\Delta f(p),h\rangle>0$ אז f עולה בכיוון h

אם $\langle\Delta f(p),h\rangle<0$ אז f יורדת בכיוון h

f עולה הכי מהר בכיוון $h=\frac{\nabla f}{|\nabla f|}$

f יורדת הכי מהר בכיוון $h=-\frac{\nabla f}{|\nabla f|}$

2) הגדרה: p אקסטרמום מקומי של f אם $\exists U_p$ כך ש
$f(x)\ge f(p)$: $\forall x\in U_p$ $(f(x)\le f(p))$

טענה: אם p אקסטרמום מקומי של f $\Rightarrow$ $\nabla f(p)=0$

הוכחה: $f(x)\ge f(p)$, $\forall x\in U_p$

$$\underbrace{\frac{f(p+th)-f(p)}{t}}_{>0}\xrightarrow{t\downarrow 0}\langle\nabla f(p),h\rangle\Rightarrow\langle\nabla f(p),h\rangle\ge 0\quad\forall h$$

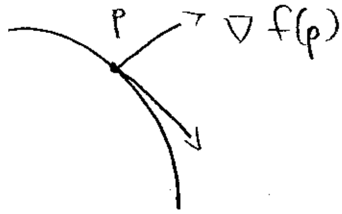
$0 \le \langle \nabla f(p), -h \rangle = -\langle \nabla f(p), h \rangle$

$\Rightarrow \forall h \in \mathbb{R}^n : \langle \nabla f(p), h \rangle = 0 \Rightarrow \nabla f(p) = 0 \quad (Df(p) = 0)$

$\square$

(3

$\nabla f(p) \perp$ level line



level line $\{x : f(x) = f(p)\}$

(level surface)

מסילה גזירה

$\gamma : [-c, c] \to \mathbb{R}^n$, $\gamma(0) = p$

$\forall t \in [-c, c] \quad f(\gamma(t)) = const = f(p)$

$\varphi(t) = f(\gamma(t)) = const$

$$0 = \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = \underbrace{\gamma'(t)}_{\in L(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^n)} \cdot \underbrace{Df(\gamma(t))}_{L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^1)} = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \quad \forall t \quad t = 0$$

$\langle \nabla f(\gamma(0)), \gamma'(0) \rangle = 0$

$\langle \nabla f(p), \underbrace{\gamma'(0)} \rangle = 0$

$(p = \gamma(0))$

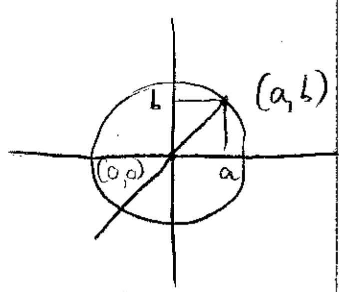
וקטור משיק, ל-γ בנק' $p = \gamma(0)$

דוגמא $\perp$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

$p = (0,0)$

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$



$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 0$

(וכנ"ל — דבר עבור y)

(נסמן $a^2+b^2=1$ ואז הנגזרת בכיוון a,b היא

$$\lim_{t \downarrow 0} \underbrace{\frac{f(at, bt) - f(0,0)}{t}}$$

$$\frac{1}{t} \frac{t^2 ab}{t^2 a^2 + t^2 b^2} = \frac{1}{t} \frac{ab}{a^2+b^2} \xrightarrow{t \downarrow 0} 0$$

זוהי דוגמא לפונ' שנגזרות חלקיות קיימות אך הפונ' לא גזירה.

דוגמא 2

$p=0$

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y}{x^{10}+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

נגזרות כיווניות קיימות:

$$\frac{1}{t}f(ta,tb)=\frac{1}{t}\,\frac{t^4a^3b}{t^{10}a^{10}+t^2b^2}=\frac{ta^3b}{t^8a^{10}+b^2}\begin{cases}\to 0, & b\neq 0\\ =0 & b=0\end{cases}$$

לכן בכל כיוון קיימת נגזרת ומתאפסת.

אבל פונ' f <u>לא רציפה</u> בראשית $p=(0,0)$. הסבר:

$$f(t,t^5)=\frac{t^8}{t^{10}+t^{10}}=\frac{1}{2t^2}\xrightarrow[t\to 0]{}+\infty$$

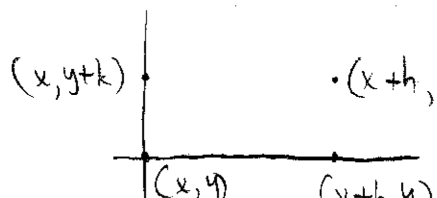
f לא חסומה, לכן לא רציפה.

<u>משפט 1</u>: נניח שקיימת סביבה $U_p\subset U$ כך ש $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ קיימות ורציפות ב- U_p. אז f גזירה בנק' p.

הערה לא קשורה [נגזרת חלקית זה מקרה פרטי של נגזרת כיוונית - בוחרים בסיס e_j (אורתונורמלי) ואילו נגזרת כיוונית זה נגזרת בכיוון ישר מסוים h]

<u>הוכחה</u>: $n=2$, $p=(x,y)$, $h^2+k^2\to 0$ $\left((h,k)\to 0\right)$

$$f(x+h,y+k)-f(x,y)\overset{?}{=}\alpha h+\beta k+o(\underbrace{\sqrt{h^2+k^2}}_{|(h,k)|})$$



$$f(x+h,y+k)-f(x,y)=$$
$$=f(x+h,y+k)-f(x,y+k)+f(x,y+k)-f(x,y)$$
$$\overset{\text{Lagrange}}{=}\frac{\partial f}{\partial x}(x+\xi h,y+k)h+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y+\eta k)k \qquad 0<\xi,\eta<1$$
$$=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+o(1)\right)h+\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)+o(1)\right)k=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)h+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)k+\underbrace{o(1)(h+k)}_{=o\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)}$$

רציפות של $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}$

(נגזרת הפונ' שווה לערך הפונ' בנקודה
פלוס משהו שהוא $o(1)$) $\square$

<u>ת.ב</u> להשלים את ההוכחה במקרה כללי $(n\geq 2)$

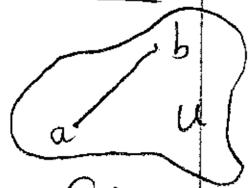
<u>הגדרה</u>: $f\in C^1(U)$ אם כל הנגזרות חלקיות $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ $(1\leq j\leq n)$ קיימות ורציפות ב- U

(ראינו בהוכחה ש" ∇ " ו"קיום הנגזרת" במשפט מספיק להראות עבור נגזרות חלקיות)

מסקנה : $f \in C(U) \iff \nabla f \in C(U,\mathbb{R}^n)$

הגדרה : $a,b \in \mathbb{R}^n$

$$[a,b]:=\{x\in\mathbb{R}^n :\ x=(1-t)a+tb\ ,\ 0\le t\le 1\}$$
$$(a,b):=\{x\in\mathbb{R}^n :\ x=(1-t)a+tb\ ,\ 0< t< 1\}$$



משפט 2 (Intermediate value property/Mean value property)

$f: U\to\mathbb{R}^1$ גזירה ב U , $[a,b]\subset U$ אז

$$\exists\, \xi\in(a,b)\quad \boxed{f(b)-f(a)=\langle\nabla f(\xi), b-a\rangle} = Df(\xi)(b-a)$$

הוכחה : נגדיר $0\le t\le 1$, $\varphi(t)=f(a(1-t)+bt)=f(a+(b-a)t)$

φ גזירה ב- $[0,1]$ (הרכבה של שתי פונקציות גזירות)

לפי לגרנז' קיימת $c\in(0,1)$ כך ש $\underbrace{\varphi(1)}_{f(b)}-\underbrace{\varphi(0)}_{f(a)}=\varphi'(c)(1-0)=$

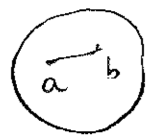
$$=\frac{d}{dt}f(a+(b-a)t)\Big|_{t=c}=\langle\nabla f(\underbrace{a+(b-a)c}_{=a(1-c)+bc:=\xi\in(a,b)}), b-a\rangle$$

$\gamma(t)=a+(b-a)t$

$\gamma'(t)=b-a$

הגדרה : $U\subset\mathbb{R}^n$ (קבוצה) קמורה (convex) אם $\forall a,b\in U$

$[a,b]\subset U$

למשל :  עיגול ומלבן זו קבוצה קמורה 

אם  לא קמורה (יש שתי נקודות — כך שהקטע לא נמצא בקבוצה)

ת.ב $B=B(x,r)=\{y\in\mathbb{R}^n : |y-x|<r\}\subset\mathbb{R}^n$ אז B קמורה

מסקנה : U קבוצה פתוחה וקמורה , $f:U\to\mathbb{R}^1$ גזירה ב-U

ו- $\sup_U|\nabla f|\le M$ אז לכל $a,b\in U$

$$|f(b)-f(a)|\le M|b-a|$$

הוכחה : לפי MVP :

$$|f(b)-f(a)|=|\langle\nabla f(\xi),b-a\rangle|\le$$
$$\overset{CS}{\le}|\nabla f(\xi)|\cdot|b-a|\le M|b-a|$$

<u>מסקנה 2</u>: $U\subset\mathbb{R}^n$ פתוחה וקשירה, f גזירה ב-U ו-

$Df(x)=0$, $\forall x\in U$ $\Leftarrow$ $f\equiv const$

<u>ק.ב</u>: $U\subset\mathbb{R}^2$ פתוחה וקשירה, $f\in C^1(U)$ ו- $\frac{\partial f}{\partial x}\equiv 0$ ב-U

אז קיימת φ : $f(x,y)=\varphi(y)$

<u>דוגמה</u>:

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

זו דוגמה לכך שרציפות של נגזרות חלקיות היא תנאי מספיק אך לא הכרחי.

- f גזירה בכל $\mathbb{R}^2$.
- $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ לא רציפות ב-0 (כי נגזרת של פונ' לא רציפה בהכרח)

זוהי הרכבה של שתי פונקציות משתנה אחד:

$r\longmapsto r^2\sin\frac{1}{r}$, $r=\sqrt{x^2+y^2}$

$\to Df(0,0)=0$

ניקח וקטור שמתכנס לאפס $w\to 0$

$$f(w)-f(0)=|w|^2\sin\frac{1}{|w|}\underset{w\to 0}{=}o(|w|)$$

(זה נחלק ב-w נקבל משהו שמתכנס לאפס)

$$|w|\sin\frac{1}{|w|}\xrightarrow{w\to 0}0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}+(x^2+y^2)\left(-\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right)\cdot\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=$$

$$=\underbrace{2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{\to 0}-\underbrace{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{\frac{t}{\sqrt{2}|t|}\cos\frac{1}{\sqrt{2}|t|}}$$

(סין חסום ו-$2x$ מתכנס לאפס)

נבדוק עבור $y=x=t$ (אלכסון)

וכאן רואים שזה לא מתכנס.