14/7 אהרונסון

חקירת פונקציות בכמה משתנים:

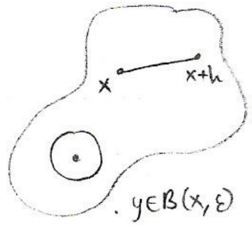
$U \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה. $f: U \to \mathbb{R}$ $C^2(U)$.

$[x, x+h] \subseteq U$

$$f(x+h) = f(x) + \langle \nabla f(x), h \rangle + \frac{1}{2}\langle d^2 f(x+\theta h)h, h\rangle =$$

$$= f(x) + \sum_{k=1}^{n} h_k f_{x_k}(x) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} h_i f_{x_i x_j}(x+\theta h) h_j =$$

lagrange

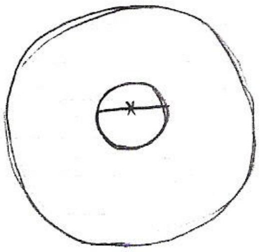


$$= f(x) + \langle \nabla f(x), h\rangle + \frac{1}{2}\langle d^2 f(x)h, h\rangle + o(\|h\|^2)$$

x מינימום מקומי עבור f אם קיים ε, $B(x,\varepsilon) \subseteq U$, $f(y) \geq f(x)$ לכל $y \in B(x,\varepsilon)$.

x מקסימום מקומי עבור f אם קיים ε, $B(x,\varepsilon) \subseteq U$, $f(y) \leq f(x)$ לכל $y \in B(x,\varepsilon)$,

אם x נקודת קיצון אזי $\nabla f(x) = 0$.



אם $\nabla f(x)=0$ אזי לפי lagrange - $\theta \in (0,1)$ סימטרית.

$$f(x+h) = f(x) + \frac{1}{2}\underbrace{\langle d^2 f(x+\theta h)h, h\rangle}_{Q_{d^2 f(x+\theta h)}(h)}$$

$$f_{yx} = f_{xy} \qquad d^2 f(x) = \left(f_{x_i x_j}(x)\right)$$

תבניות ריבועיות של מטריצה סימטרית:

$A \in hom(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ סימטרית $(a_{ij} = a_{ji})$

$$Q_A(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = \langle Ax, x\rangle$$

קיים בסיס אורתונורמלי של וקטורים עצמיים עבור A:

$AE_k = \lambda_k E_k$ $\quad x = \sum_{j=1}^{n} c_j E_j$ $\quad |E_i| = 1$, $\quad E_i \perp E_j : i \neq j$

$$Q_A(x) = \langle Ax, x\rangle = \sum_{i,j} c_i c_j \langle \underbrace{AE_i}_{\lambda E_i}, E_j\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i c_i^2$$

A תקרא חיובית ($A>0$) (אי-שלילית, $A \geq 0$) אם $Q_A(x) > 0$ (≥ 0) לכל $x \neq 0$.

A תקרא שלילית ($A<0$) (אי-חיובית, $A \leq 0$) אם $-A$ חיובית (אי-שלילית)

$A > 0$ $(A \geq 0)$ $\iff$ כל הערכים העצמיים חיוביים (אי-שליליים).

עבור $n=2$: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ $\qquad Q_A(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$

$\Delta = \Delta_A = ac - b^2$ דטרמיננטה.

ערכים עצמיים: λ_1, λ_2 $\qquad \lambda_1, \lambda_2 > 0$ "קמור"

$\lambda_1, \lambda_2 < 0$ "קעור"

$\lambda_1 > 0 > \lambda_2$ "אוכף"

$\Delta > 0$:

(i)(a) $a, c > 0$:

$$Q(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 = a\left(x^2 + \frac{2b}{a}xy\right) + cy^2 = a\left(\left(x + \frac{by}{a}\right)^2 - \frac{b^2y^2}{a^2}\right) + cy^2 =$$

$$= a\left(x + \frac{by}{a}\right)^2 + y^2\underbrace{\left(c - \frac{b^2}{a}\right)}_{= \Delta/a} > 0 \qquad (x,y) \neq (0,0)$$

(i)(b) $a, c < 0$:

$$-Q_A = Q_{-A} > 0$$

$\Delta < 0$:

$$\det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{pmatrix} = (a-\lambda)(c-\lambda) - b^2 = \lambda^2 - (a+c)\lambda + \Delta = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$$

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &= a + c \\ \lambda_1 \cdot \lambda_2 &= \Delta < 0 \end{aligned}\right\}$$ סימנים שונים $\Rightarrow$ אוכף.

$\Delta = 0$:

(iii)(a) $ac = 0$: $\Leftarrow$ $b = 0$. $\qquad ac \geq 0$

(iii)(b) $a, c \geq 0$: $\qquad b = \pm\sqrt{ac}$

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = ax^2 \pm 2\sqrt{ac}\,xy + cy^2 = (\sqrt{a}\,x \pm \sqrt{c}\,y)^2$$

$A \geq 0$

(iii)(c) $a, c \leq 0$:

$$Q_{-A}(x,y) = -Q_A(x,y) \leq 0$$

$-A \geq 0$

1.

$$f(x) = x^3 + 9xy - y^3$$

$$f_x = 3x^2 + 9y \quad , \quad f_y = 9x - 3y^2$$

$$\nabla f = 0 \iff y = \frac{-x^2}{3} \;,\; x = \frac{y^2}{3} \Rightarrow (x,y) = (0,0), (3,-3)$$ לפי פתרון מערכת משוואות:

$$d^2f(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & 9 \\ 9 & -6y \end{pmatrix}$$

$$\Delta(x,y) = -36xy - 81$$

$$\Delta(0,0) = -81 < 0 \Rightarrow (0,0)$$ אוכף

$$\Delta(3,-3) = -36(-9) - 81 = 3 \cdot 81 > 0 \Rightarrow (3,-3)$$ מינימום מקומי חזק

ב.

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2$$

$f_x = 4x^3 - 4x$ $\qquad$ $f_y = 4y^3$

$\nabla f(x,y) = (4x^3 - 4x, 4y^3)$ $\qquad$ $d^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2-4 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix}$

$\nabla f = 0 \iff (x,y) = (0,0), (\pm 1, 0)$ $\qquad$ $\Delta = f_{xx} f_{yy} = 0 \,; \quad \forall x,y \in (x,y) = (0,0), (\pm 1, 0)$

כיון ש-f_{yy} מתאפס

משפט Lagrange (השארית) לא עוזר כאן.

$$f(x,y) = (x^2-1)^2 + y^4 - 1 = (x-1)^2 (x+1)^2 + y^4 - 1$$

$(\pm 1, 0)$ - מינימום מקומי $\qquad$ $(0,0)$ - אוכף $\qquad$ $f(x,0) = x^4 - 2x^2 < 0$ קטן $|x|>0$

$f(0,y) = y^4 > 0$ $\qquad$ $y \neq 0$

יהיה $U \subseteq \mathbb{R}^2$ פתוחה, $f: U \to \mathbb{R}$, C^2.

נניח כי $z \in U$, $(f_x(z), f_y(z)) = \nabla f(z) = 0$. יהי $\Delta := f_{xx}(z) f_{yy}(z) - f_{xy}(z)^2$

(i) אם $\Delta > 0$, $f_{xx}(z) > 0$ אזי z מינימום מקומי חזק עבור f

(ii) אם $\Delta > 0$, $f_{xx}(z) < 0$ אזי z מקסימום מקומי חזק עבור f.

(iii) אם $\Delta < 0$ אזי z נקודת אוכף עבור f.

(i): $A := d^2 f(z)$, $\quad [z, z+h] \subseteq U$, $\quad \theta \in (0,1)$

$$f(z+h) = f(z) + \frac{1}{2} \langle d^2 f(z+\theta h) h, h \rangle = f(z) + \frac{1}{2} \langle Ah, h \rangle + o(\|h\|^2)$$

נגדיר -

$m := \min\{ \langle Au, u \rangle : \|u\| = 1 \}$

$M := \max\{ \langle Au, u \rangle : \|u\| = 1 \}$ $\qquad$ $M \geq m$

(i) $\Delta > 0$, $f_{xx}(z) > 0 \Leftarrow M \geq m > 0$

(ii) $\Delta > 0$, $f_{xx}(z) < 0 \Leftarrow 0 > M \geq m$

(iii) $\Delta < 0 \Leftarrow m < 0 < M$

קיים $\varepsilon > 0$, $B(x, \varepsilon) \subseteq U$ כך שלכל $\|h\| < \varepsilon$:

$$\left| f(z+h) - f(z) - \frac{1}{2} Q_A(h) \right| < \frac{\eta}{10} \|h\|^2 \qquad \eta = \min\{|m|, |M|\}$$

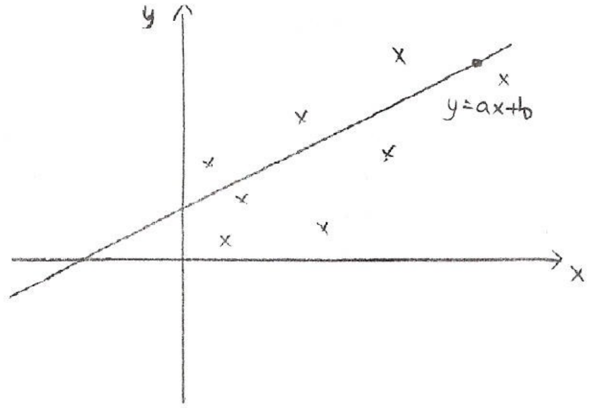
$$\left| f(z+h) - f(z) - \frac{1}{2} Q_A(h) \right| \leq \frac{\eta}{10} \|h\|^2$$

$$f(z+h) \geq f(z) + \frac{1}{2} Q_A(h) - \frac{\eta}{10} \|h\|^2$$

$$= f(z) + \frac{1}{2} \|h\|^2 Q_A(u) - \frac{\eta}{10} \|h\|^2 \qquad h = \|h\| \cdot u, \ \|u\| = 1$$

$$\geq f(z) + \|h\|^2 \left(\frac{m}{2} - \frac{\eta}{10} \right) > f(z) \qquad h \neq 0$$

רגרסיה : Regression



$$F = \{(x_i, y_i) \mid 1 \le i \le N\}$$

$$E(a,b) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (y_i - (ax_i + b))^2$$

מינימום

$$E(a,b) \xrightarrow[(a,b)\to\infty]{} \infty$$

תמיד אי-שלילי, יש inf, זוהי
קבוצה קומפקטית — ולכן יש מינימום מקומי

$$\exists z = (A,B) \in \mathbb{R}^2 \ , \ E(A,B) \le E(a,b) \ , \ \forall a,b \quad \Rightarrow \quad \nabla E(A,B) = 0$$

$$E_a = \frac{-2}{N} \sum_{i=1}^{N} \left(x_i (y_i - (ax_i + b))\right)$$

$$E_b = \frac{-2}{N} \sum_{i=1}^{N} (y_i - (ax_i + b))$$

$$\nabla E = 0 \iff \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i y_i = \frac{a}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i^2 + \frac{b}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i$$

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} y_i = \frac{a}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i + b$$

$$\overline{xy} = a\overline{x^2} + b\bar{x}$$

$$\bar{y} = a\bar{x} + b$$

האם יש פתרון יחיד?
כאשר $N \ge 2$ יש פתרון, רק [illegible]
אך הוא יחיד.

$$E_a = -2(\overline{xy} - (a\overline{x^2} + b\bar{x}))$$

$$E_b = -2(\bar{y} - (a\bar{x} + b))$$

$$d^2F = \begin{pmatrix} 2\overline{x^2} & 2\bar{x} \\ 2\bar{x} & 2 \end{pmatrix}$$

$\underline{N \ge 2}$:

$$\Delta = 4\overline{x^2} - 4\bar{x}^2 \overset{?}{>} 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i^2 > \frac{1}{N^2} \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2$$

$$\left|\sum_{i=1}^{N} x_i\right| \le \sqrt{N} \sqrt{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}$$