חדו"א 2 - הרצאה 6

23.5.2008

משפט

לכל $n\in\mathbb{N}$, $\sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n} < n! < e^{\frac{1}{12n}}\sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}$

מסקנה (נוסחת סטירלינג)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}} = \sqrt{2\pi}$$

הוכחה: 3 שלבים:

1) 1-st approximation

$$\log n! = \sum_{k=1}^{n}\log k$$

(בגלל ש-log מונוטונית)
$$\int_{k-1}^{k}\log x\,dx < \log k < \int_{k}^{k+1}\log x\,dx$$

$$\underbrace{\int_{0}^{n}\log x\,dx}_{x\log x - x\big|_0^n =} < \log n! < \underbrace{\int_{1}^{n+1}\log x\,dx}_{x\log x - x\big|_1^{n+1} =}$$

$$= n\log n - n \qquad\qquad = (n+1)\log(n+1) - (n+1) + 1 = (n+1)\log(n+1) - n$$

קיבלנו:
$$n\log n - n < \log n! < (n+1)\log(n+1) - n$$

2) נגדיר סדרה
$$d_n = \log n! - \left[\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\log n - n\right] \qquad = \log\frac{n!}{(n+1)^n}$$

$$d_n - d_{n+1} = \log n! - \log(n+1)! - \left(n+\tfrac{1}{2}\right)\log n + n + \left(n+\tfrac{3}{2}\right)\log(n+1) - (n+1) =$$

$$= -\log(n+1)! - \left(n+\tfrac{1}{2}\right)\log n + \left(n+\tfrac{1}{2}\right)\log(n+1) + \log(n+1) - 1 =$$

$$= \left(n+\tfrac{1}{2}\right)\log\left(1+\tfrac{1}{n}\right) - 1$$

$$1+\frac{1}{n} = \frac{1+\frac{1}{2n+1}}{1-\frac{1}{2n+1}}$$

$$\boxed{d_n - d_{n+1} = (2n+1)\,\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\frac{1}{2n+1}}{1-\frac{1}{2n+1}}\right) - 1}$$

$0<t<\frac{1}{2}$

$$0 < t = \frac{1}{2n+1} < \frac{1}{2} \implies \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{2}\log\frac{1+t}{1-t} - 1$$

$$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \dots$$

$$\log(1-t) = -t - \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} - \dots$$

מחדו"א 1, פיתוח טיילור:

$$\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{2}\log\frac{1+t}{1-t}-1 = \frac{1}{t}\left[t+\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}+\dots\right]-1 = \frac{t^2}{3}+\frac{t^4}{5}+\frac{t^6}{7}+\dots$$

$$\frac{t^2}{3}+\frac{t^4}{5}+\frac{t^6}{7} < \frac{t^2}{3}\underbrace{\left[1+t^2+t^4+\dots\right]}_{\frac{1}{1-t^2}} = \frac{t^2}{3(1-t^2)}$$

לכן:

$$0<\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{2}\log\frac{1+t}{1-t}-1<\frac{t^2}{3(1-t^2)}$$

$$0<d_n-d_{n+1}<\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2n+1)^2-1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4n^2+4n}=$$

$$=\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{n^2+n}=\frac{1}{12}\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right]$$

$$\boxed{0<d_n-d_{n+1}<\frac{1}{12}\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right]}$$ לכן

(3) $d_n \downarrow C$, $d_n-\frac{1}{12n}\uparrow$ $\Leftarrow$ $0<\theta_n<1$, $d_n=C+\frac{\theta_n}{12n}$ (מכיוון ש $C<d_n<C+\frac{1}{12n}$)

$$\log n! - (n+\tfrac{1}{2})\log n + n = C+\frac{\theta_n}{12n}$$

(עד הקבוע: [illegible])

$$\boxed{\begin{aligned}\log n! &= (n+\tfrac{1}{2})\log n - n + C + \frac{\theta_n}{12n}\\ n! &= n^{n+\frac{1}{2}}\cdot e^{-n}\underbrace{(e^C)}_{=A}\cdot e^{\theta_n/12n}\end{aligned}}$$

(4) $e^C=\sqrt{2\pi}$

נוסחת Wallis:

$$\lim \frac{1}{2n+1}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2=\frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{A_n\sim B_n \iff \frac{A_N}{B_N}\xrightarrow[n\to\infty]{}1} \text{ [illegible]}$$

([illegible]) $\frac{1}{\sqrt{2n}}\cdot\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\sim\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ (ω)

$$(2n)!! = 2\cdot4\cdot6\cdots(2n) = 2^n\cdot n!$$

$$(2n-1)!! = 1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1) = \frac{(2n)!}{(2n)!!}=\frac{(2n)!}{2^n\cdot n!}$$

$$(\omega) \Rightarrow \boxed{\frac{1}{\sqrt{2n}}\cdot\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}\underset{n\to\infty}{\sim}\sqrt{\frac{\pi}{2}}}$$

$(3$ מעיצוב$)$ $n! \sim A n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$

$(n!)^2 \sim A^2 n^{2n+1} e^{-2n}$

$(2n)! \sim A (2n)^{2n+\frac{1}{2}} e^{-2n} = A\, 2^{2n+\frac{1}{2}} n^{2n+\frac{1}{2}} e^{-2n}$

$$\left(\sqrt{\tfrac{\pi}{2}} \sim\right) \frac{1}{\sqrt{2n}} \cdot \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n)!} \sim \frac{1}{(2n)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{2^{2n} \cdot A^2 n^{2n+1} e^{-2n}}{A \cdot (2n)^{2n+\frac{1}{2}} e^{-2n}} =$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{A}{2^{\frac{1}{2}}} = \frac{A}{2}$$

$$\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$\boxed{A = \sqrt{2\pi}}$$

משל

משפט: $\pi \notin \mathbb{Q}$

הוכחה: נוכיח כי $\pi^2 \notin \mathbb{Q}$ $(\Leftarrow \pi \notin \mathbb{Q})$

רעיון: $\pi^2 = \frac{p}{q}$ (הנחה בשלילה) בונים פולינומים $P_n \in \mathbb{Z}[x]$ עם מקדמים שלמים, $\deg P_n = n$

1) $q^n \cdot P_n\left(\frac{p}{q}\right) \in \mathbb{N}$ לכל n

2) $q^n P_n(\pi^2) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

וזה יגיע לסתירה $\pi^2 \neq \frac{p}{q}$

נגדיר $$I_n = \frac{1}{n!} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^n \cos t \, dt$$

טענה: $I_{n+1} \overset{?}{=} (4n+2) I_n - \pi^2 I_{n-1}$, $I_0 = 2$, $I_1 = 4$

א) I_n פולינום ב־ π^2 עם מקדמים שלמים (אינדוקציה ב־ n). (π^2 הוא המשתנה בפולינומים)

$I_2 = 6 \cdot I_1 - \pi^2 \cdot I_0 = 24 - 2\pi^2$

ב) $I_n > 0$ לכל

ג) לכל קבוע q: $q^n I_n \to 0$, $n\to\infty$

$I_n \leq \frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{\pi^2}{4}\right)^n \cdot \pi$ $\quad 0 < q^n I_n \leq \frac{\left(q \frac{\pi^2}{4}\right)^n}{n!} \cdot \pi \downarrow 0$

הוכחה של הטענה:

$$I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n+1} (\sin t)'\, dt$$

אינטגרציה בחלקים $= \frac{1}{(n+1)!} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin t\,(n+1)(-2t)\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^n dt = \frac{2}{n!}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (-\cos t)'\, t\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^n dt =$

$$= \frac{2}{n!}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t\left[\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^n - 2nt^2\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-1}\right] dt =$$

$$= 2I_n - \frac{4n}{n!}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cdot \underbrace{t^2}_{\left(t^2 - \frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^2}{4}\right)}\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-1} dt =$$

$$= 2I_n + 4nI_n - \pi^2 I_{n-1} = \boxed{(4n+2)I_n - \pi^2 I_{n-1}}$$

$$I_0 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t\, dt = \sin t\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 1 + 1 = \boxed{2}$$

$$I_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right) dt = \frac{\pi^2}{4}\cdot 2 - \underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos t\, dt}_{2J \text{ (בגלל שהפונקציה זוגית)}}$$

ההצבה במכפלת שתי הפונקציות מתאפסת

$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 (\sin t)'\, dt = \frac{\pi^2}{4} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t\, dt = \frac{\pi^2}{4} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} t(-\cos t)'\, dt =$ אינטגרציה בחלקים

$$= \frac{\pi^2}{4} - 2\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\, dt}_{1} = \boxed{\frac{\pi^2}{4} - 2}$$

$I_1 = \frac{\pi^2}{2} - 2J =$ אז

$$= \frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{2} + 4 = \boxed{4}$$