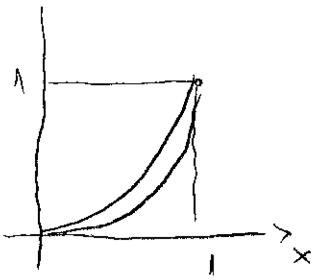
26/5/03 חדו"א 2 - הרצאה 7

Sequence of functions, Series of functions

<u>מוטיבציה</u> - שאלות:

1) $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$, $\forall x\in[0,1]\quad f_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$

$f_n\in C[0,1] \Rightarrow f\in C[0,1]$? לא,



<u>דוגמא</u>: $f_n(x)=x^n$, $0\le x\le 1$

$f(x)=\begin{cases}0, & 0\le x<1\\ 1, & x=1\end{cases}$ לא רציפה

אז התכנסות לא שומרת על רציפות.

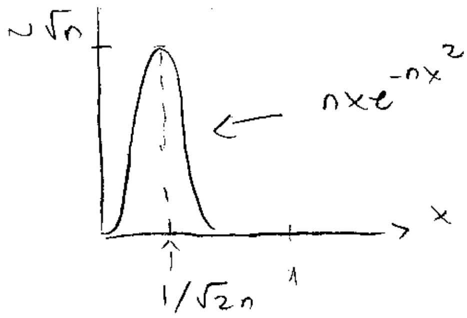
2) האם $\int_0^1 f_n \to \int_0^1 f$? לא

<u>דוגמא</u>: $f_n(x)=nxe^{-nx^2}$

$f_n(x)\to 0 \qquad 0\le x\le 1$

$$\int_0^1 f_n = n\int_0^1 xe^{-nx^2}dx = \{\sqrt{n}x=t\}$$
$$=\sqrt{n}\underbrace{\int_0^{\sqrt{n}} te^{-t^2}dt}_{\to\int_0^\infty te^{-t^2}dt} \longrightarrow +\infty$$

כלומר סדרה של פונקציות מתכנסת לאפס, אך האינטגרל מתכנס ל-∞.



<u>טורים</u>

$\sum_{n=1}^\infty f_n(x)$ מתי סכום של טור נותן פונק' רציפה?

$\sum_{n=0}^\infty a_n z^n$, $\sum_{n=-\infty}^\infty a_n e^{int}$ מתי אפשר לגזור איבר איבר אותו טור?

על שאלות אלו נענה בהמשך.

<u>הגדרה</u>: (התכנסות במידה שווה = uniform conv)

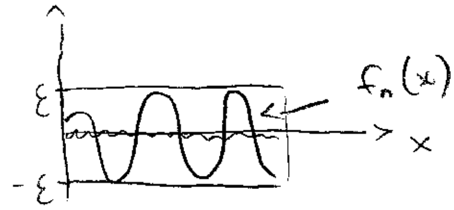
$f_n:E\to\mathbb{R}$, f_n מתכנסת במידה שווה ל-f ($f_n\rightrightarrows f$, $f_n\Rightarrow f$) אם $\sup_E|f_n-f|\to 0$ (*), כלומר:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N_\varepsilon\ \forall n\ge N_\varepsilon\ \forall x\in E\quad |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

(ההבדל בין התכנסות להתכנסות במידה שווה "דומה" להבדל בין רציפות ורציפות במ"ש [illegible] לכל n [illegible] x)

כלומר כל הפונקציה כולה בתחום

$\forall n \ge n_\varepsilon \qquad E=[0,1] \qquad f_n \rightrightarrows 0$



---

pointwise $\quad f_n \to f$

$$\forall x \in E \quad f_n(x) \to f(x)$$

לדוגמא : $\underbrace{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}_{f_n} \to \underbrace{e^x}_{f}$

<u>דוגמאות</u>

1) $f_n(x)=x^n, \quad f=\begin{cases} 0, & 0\le x<1 \\ 1, & x=1 \end{cases} \quad E=[0,1]$

$f_n \to f$ באופן נקודתי, אבל לא במ"ש.

$$(f_n-f)(x)=\begin{cases} x^n, & 0\le x<1 \\ 0, & x=1 \end{cases}$$

$\sup_{[0,1]}|f-f_n|=1 \not\to 0$ לכן היא לא מתכנסת במ"ש

אבל אם ניקח $E=[0,\frac{7}{8}]$, $f_n \rightrightarrows 0$

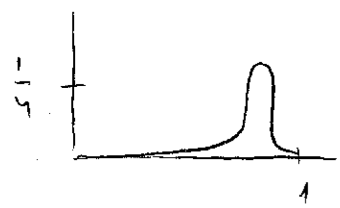
$\sup_{[0,\frac{7}{8}]}|f_n|=\left(\frac{7}{8}\right)^n \to 0$ כלומר הפונ' מתכנסת במ"ש.

2) $f_n(x)=x^n-x^{2n}=x^n(1-x^n)$

$f_n(x) \underset{n\to\infty}{\to} 0 \quad x\in[0,1]$ כלומר הפונ' מתכנסת באופן נקודתי לאפס.

נבדוק האם היא מתכנסת במ"ש :

$\max_{[0,1]}(x^n-x^{2n})=\frac{1}{4} \not\to 0$



<u>קריטריון Cauchy</u>

$f_n: E\to\mathbb{R}$, סדרה f_n מתכנסת במ"ש ל-f אמ"מ

$$\forall\varepsilon>0 \ \exists N_\varepsilon \ \forall n,m\ge N_\varepsilon \ \sup_E|f_n-f_m|<\varepsilon \quad (C)$$

הוכחה: (נראה שתנאי קושי שקול להתכנסות במ"ש)

$(*) \Rightarrow (c)$:

$$|f_n - f_m| \le |f_n - f| + |f_m - f|$$

$$\sup_E |f_n - f_m| \le \sup_E |f_n - f| + \sup_E |f_m - f| < 2\varepsilon$$

$(c) \Rightarrow (*)$: לפי משפט Cauchy לסדרות:

$f_n(x) \to f(x)$ באופן נקודתי.

$$\forall n,m \ge N_\varepsilon \quad \forall x \in E \quad f_m(x) - \varepsilon < f_n(x) < f_m(x) + \varepsilon \qquad m \to \infty$$

$$f(x) - \varepsilon \le f_n(x) \le f(x) + \varepsilon$$

$$\Rightarrow \sup_E |f_n - f| < \varepsilon, \quad \forall n \ge N_\varepsilon. \quad \square$$

משפט 1: $f_n \in C(I)$, I קטע

$f_n \rightrightarrows f \Rightarrow f \in C(I)$ (אם סדרה של פונקציות מתכנסות ל-f אזי הגבול f הוא פונ' רציפה)

הוכחה: $x_0 \in I$, נבדוק רציפות של f ב-x_0:

$$|f(x) - f(x_0)| \le |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|$$

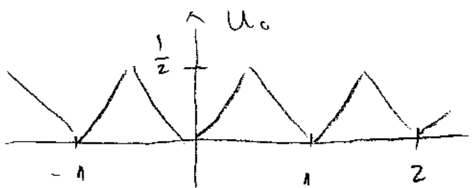
יהי $\varepsilon > 0$. נבחר n כך ש- $\sup_I |f_n - f| < \varepsilon$ (כי f_n מתכנסת במ"ש ל-f)

נבחר δ כך ש- $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon$ (f_n רציפה)

כך נקבל כל שלושת המחוברים קטנים מ-ε ולכן $< 3\varepsilon$.

דוגמא (van der Warden)

קיימת פונקציה $f \in C(\mathbb{R})$ ולא גזירה בכל נק' x.



$$0 \le u_k \le \frac{1}{2 \cdot 4^k}$$

$$u_0(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 1-x, & \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}$$

$$u_0(x+1) = u_0(x)$$

$$u_k(x) = \frac{u_0(4^k x)}{4^k}$$

$$u_k(x + 4^{-k}) = u_k(x)$$

נגדיר $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)$. נוכיח מתכנס במ"ש שכן $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k(x)$

סדרה $S_n(x)$ מתכנסת במ"ש - לפי קריטריון Cauchy:

$$\sup_{\mathbb{R}} |S_n(x) - S_m(x)| = \sup_{\mathbb{R}} \left|\sum_{k=m+1}^{n} u_k(x)\right| < \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{2 \cdot 4^k} < \varepsilon$$

אם m מספיק גדול. $\Rightarrow f \in C(\mathbb{R})$ (לפי משפט 1)

$x_0 \in \mathbb{R}$, נגדיר $\alpha_n = [2\cdot 4^n x_0]$

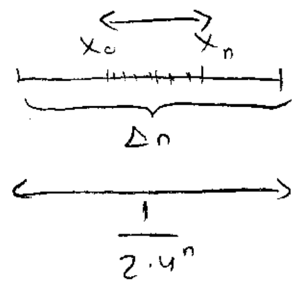
$$\frac{\alpha_n}{2\cdot 4^n} \le x_0 \le \frac{\alpha_n+1}{2\cdot 4^n}$$

נגדיר קטע $\Delta_n = \left[\frac{\alpha_n}{2\cdot 4^n}, \frac{\alpha_n+1}{2\cdot 4^n}\right]$

$$\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \dots \supset \Delta_n \supset \dots$$

(למת קנטור) $\bigcap_n \Delta_n = \{x_0\}$, $|\Delta_n| = \frac{1}{2\cdot 4^n}$

$\exists x_n \in \Delta_n \quad |x_0 - x_n| = \frac{1}{4^{n+1}}$



$\Rightarrow U_k(x_n) = U_k(x_0) \quad , \forall k > n$

אז $\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0} = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\frac{U_k(x_n)-U_k(x_0)}{x_n-x_0}}_{=\pm 1}$

נסיים את ההוכחה בבית !

<u>משפט 2 (דיני)</u> (כיוון שני של משפט 1)

$f_n \in C[a,b]$, אם $f_n \downarrow f$ (או $f_n \uparrow f$) ו־$f \in C[a,b]$ אז $f_n \rightrightarrows f$

<u>הוכחה</u>: יהי $\varepsilon > 0$, $x \in [a,b]$

$\exists n_x : 0 \le f_{n_x}(x) - f(x) < \varepsilon \quad , \forall n \ge n_x$ (כי הסדרה יורדת)

$\exists U_x$ (סביבה של x) כך ש־ $\forall t \in U_x \quad 0 \le f_{n_x}(t) - f(t) \le \varepsilon$ (מרציפות של f ו־f_{n_x})

כעת, $[a,b] \subset \bigcup_x U_x$ $\Leftarrow$ לפי למת היינה בורל קיים תת-כיסוי סופי

$$[a,b] \subset \bigcup_{j=1}^{N} U_{x_j}$$

אז $n^* = \max_{1 \le j \le N} n_{x_j}$. $\forall t \in [a,b] \ \forall n \ge n^* \quad 0 \le f_n(t) - f(t) < \varepsilon$

$\Leftarrow f_n \rightrightarrows f$. □

<u>משפט 3</u> (על סדרה מתכנסת במ"ש של אינטגרביליות רימן)

$f_n \in R[a,b]$, $f_n \rightrightarrows f$ אזי:

1) $f \in R[a,b]$ 2) $\int_a^b f_n \to \int_a^b f$

<u>הוכחה</u>: 1) $f \in R[a,b]$ (פונ' גבולית אינטגרבילית)

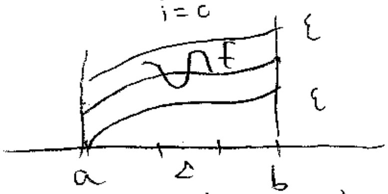
יהי $\varepsilon > 0$. נבחר n כך ש־ $\sup_{[a,b]} |f_n - f| < \varepsilon$

נבחר חלוקה $\Pi = \{t_i\}$, $\Delta_i = [t_i, t_{i+1}]$ כך ש־

$$\sum^{N-1} \omega(f_n, \Delta_i)|\Delta_i| < \varepsilon$$

$$\omega(f,\Delta)=\sup_\Delta f-\inf_\Delta f<\omega(f_n,\Delta)+2\varepsilon$$

$$\sum_{i=0}^{N-1}\omega(f,\Delta_i)|\Delta_i|\le\underbrace{\sum_{i=0}^{N-1}\omega(f_n,\Delta_i)|\Delta_i|}_{<\varepsilon}+\underbrace{\sum_{i=0}^{N-1}2\varepsilon|\Delta_i|}_{2\varepsilon(b-a)}<\varepsilon(2(b-a)+1)$$



□

2. $\int_a^b f_n\to\int_a^b f$

$$\left|\int_a^b f_n-\int_a^b f\right|=\left|\int_a^b(f_n-f)\right|\le\int_a^b|f_n-f|\le\sup_{[a,b]}|f_n-f|\cdot(b-a)<\varepsilon(b-a)$$

□

<u>משפט 4</u>: $f_n\in C^1[a,b]$, נניח ש

- $f_n'\rightrightarrows g$
- $\{f_n(c)\}\xrightarrow{\text{מתכנסת}}$ $\exists c\in[a,b]$ אז $f_n\rightrightarrows f$ ו- $f'=g$.

<u>הוכחה</u>

$$f_n(x)-f_n(c)=\int_c^x f_n'\underset{(\text{משפט } 3)}{\longrightarrow}\int_c^x g$$

$$f_n(x)=\int_c^x f_n'+f_n(c)$$

(f_n סכום של סדרות מתכנסות) $\Rightarrow$ $f_n\to f$ באופן נקודתי.

תחילה נראה כי $f'=g$: $f(x)-f(c)=\int_c^x g$ f קדומה של g

$\Rightarrow f'=g$ (לפי משפט יסודי של אינטגרל)

כעת נראה כי $f_n\rightrightarrows f$:

$$\max_{[a,b]}|f_n(x)-f(x)|\le\max_{[a,b]}\Big(\big|\underbrace{f_n(x)-f_n(c)}_{\int_c^x f_n'}-\underbrace{(f(x)-f(c))}_{\int_c^x f'}\big|+|f_n(c)-f(c)|\Big)$$

$$\le\max_{[a,b]}\left|\int_c^x f_n'-f'\right|+|f_n(c)-f(c)|\le\underbrace{\max_{x\in[a,b]}\int_c^x|f_n'-g|}_{\to 0}+\underbrace{|f_n(c)-f(c)|}_{\to 0}$$