משפט (משיגור שעבר): $f_n\in C^1[a,b]$ $\quad f_n' \rightrightarrows g$

קיימת נק' $c\in[a,b]$ כך ש- $\exists \lim_n f_n(c)$

אז $f_n\rightrightarrows f$, $f\in C^1$ $\quad f'=g$

דוגמא: $x\in[a,b]$, $f_n(x)=(-1)^n$

$f_n'=0$

הוכחה: $x\in[a,b]$, $f_n(x)=\underbrace{f_n(c)+\int_c^x f_n'}_{\text{מתכנס},\ n\to\infty}$
$\qquad \downarrow$
$\quad f(x)$

$f(c)=\lim_n f_n(c)$

$f_n\to f$ point-wise

1) $$f(x)=f(c)+\int_c^x g$$

g רציפה $\Leftarrow$ לפי משפט NL (משפט יסודי של אינטגרל) $f\in C^1$ $f'=g$.

נותר להוכיח כי $f_n\rightrightarrows f$

$$f_n(x)-f(x)=f_n(c)+\int_c^x f_n'-f(c)-\int_c^x f'$$

$$\max_{x\in[a,b]}|f_n(x)-f(x)|\le\underbrace{|f_n(c)-f(c)|}_{\xrightarrow[n\to\infty]{}0}+\underbrace{\max_{x\in[a,b]}\left|\int_c^x(f_n'-f')\right|}_{\le}$$

$$\le\max_{x\in[a,b]}\int_c^x|f_n'-f'|\le\int_a^b|f_n'-g|\xrightarrow{n\to\infty}0\qquad\square$$

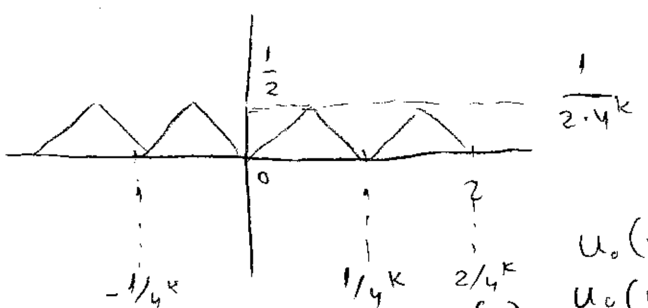
דוגמא: קיימת פונקציה f רציפה ב $\mathbb{R}$ אך לא גזירה באף נקודה.

Weierstrass

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a^k\cos(b^k\pi x)\qquad 0<a<1,\ ab>1$$

פרמטרים שונים הוכיחו ע"י $b=32$, $a=\frac{1}{4}$.

Van der Waerden



$$u_0(x)=\begin{cases}x, & 0\le x\le\frac{1}{2}\\ 1-x, & \frac{1}{2}\le x\le 1\end{cases}$$

$u_0(x+1)=u_0(x)$

$$u_k(x)=\frac{u_0(4^kx)}{4^k}$$

$$u_k\left(x+\frac{1}{4^k}\right)=u_k(x)$$

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}u_k(x)$$ (לפי Cauchy $\sum u_k\rightrightarrows f$ פונק' רציפות ב- $\mathbb{R}$ ... ק"מ)

יהי $x_0 \in \mathbb{R}$.

צריך להראות שהגבול $\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}$ לא קיים.

(נמצא סדרה x_n שמתכנסת ל- x_0 כך שהגבול לא קיים)

$s_n = [2\cdot 4^n x_0]$, x_0

(הגדרה של ערך שלם)

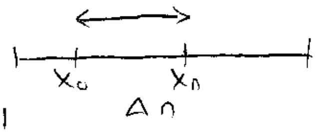
$$s_n \le 2\cdot 4^n x_0 < s_n+1$$

$$\frac{s_n}{2\cdot 4^n} \le x_0 < \frac{s_n+1}{2\cdot 4^n}$$

קטע $\longrightarrow \Delta_n := \left[\frac{s_n}{2\cdot 4^n}, \frac{s_n+1}{2\cdot 4^n}\right] \ni x_0$

$$\ldots \supset \Delta_{n-1} \supset \Delta_n \supset \Delta_{n+1} \supset \ldots$$

$\bigcap_n \Delta_n = \{x_0\}$ (לפי למת קנטור)



$x_0 \longleftarrow x_n \in \Delta_n \quad |x_n - x_0| = \frac{1}{2}|\Delta_n| = \frac{1}{4^{n+1}}$

נראה שלסדרה x_n לא קיים גבול

$$\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u_k(x_n)-u_k(x_0)}{x_n-x_0} =$$

$$\underline{u_k(x_n) = u_k(x_0)} \quad \Leftarrow \quad k \ge n+1$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{u_k(x_n)-u_k(x_0)}{x_n-x_0} =$$

$$x_n, x_0 \in \Delta_n \subset \Delta_k \quad k \le n$$

הפונ' u_0 לא גזירה בנק' $\frac{m}{2}, m\in\mathbb{Z}$

u_1 לא גזירה ב $\frac{m}{2\cdot 4}, m \in \mathbb{Z}$

... u_k לא גזירה ב $\frac{m}{2\cdot 4^k}, m\in\mathbb{Z}$

$$\frac{u_k(x_n)-u_k(x_0)}{x_n-x_0} = \pm 1$$

ולכן $= \sum_0^n \pm 1 = \begin{cases} \text{even} & , n \text{ odd} \\ \text{odd} & , n \text{ even} \end{cases}$ לכן גבול לא קיים!

<u>משפט Weierstrass</u> (אפשר לקרב כל פונ' רציפה ע"י פולינומים)

$$\forall f \in C[a,b]\ \forall \varepsilon > 0\ \exists p \text{ (פולינום) } \max_{[a,b]} |f-p| < \varepsilon$$

(פונ' רציפה ניתן לקרב ע"י פונקציות מדרגות, פונקציה לינארית למקוטעין)

$\Longleftrightarrow \forall f \in C[a,b]$

$\exists \{p_n\}$ (פולינומים), $p_n \rightrightarrows f$

הוכחה (של S. Bernstein)

הערה: מספיק להוכיח עבור הקטע $[0,1]$

$f\in C[a,b]$, נגדיר $F(t)=f(a+t(b-a))\in C[0,1]$ $\quad 0\le t\le 1$

לפי מקרה פרטי

$$\max_{[0,1]}|F-Q|<\varepsilon$$

נגדיר

$$p(x)=Q\left(\frac{x-a}{b-a}\right),\quad x\in[a,b]$$

$$\max_{[a,b]}|f-p|=\max_{[0,1]}|F-Q|<\varepsilon$$

הוכחה $f\in C[0,1]$. נגדיר:

$$B_n(x,f)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f\left(\frac{k}{n}\right)x^k(1-x)^{n-k}$$

$$\overset{?}{\rightrightarrows}_{n\to\infty} f$$

Bernstein's polynomial

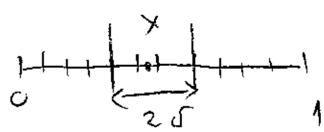
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=1 \qquad (1)$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2x^k(1-x)^{n-k}=\frac{x(1-x)}{n} \qquad (2)$$

$\varepsilon>0$, $\delta>0$

$$f(x)-B_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)x^k(1-x)^{n-k}$$

$$=\Big(\underbrace{\sum_{k:\left|\frac{k}{n}-x\right|<\delta}}_{\Sigma_1}+\underbrace{\sum_{k:\left|\frac{k}{n}-x\right|\ge\delta}}_{\Sigma_2}\Big)$$



נבחר δ כך ש $\quad \left|x-\frac{k}{n}\right|<\delta \Rightarrow \left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|<\varepsilon$

$$|\Sigma_1|\le\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|<\delta}\binom{n}{k}\varepsilon x^k(1-x)^{n-k}\le\varepsilon\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\overset{(1)}{=}\varepsilon$$

נגדיר $M=\max_{[0,1]}|f|$

$$|\Sigma_2|\le 2M\sum_{k:\left|\frac{k}{n}-x\right|>\delta}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\frac{\left(\frac{k}{n}-x\right)^2}{\delta^2}$$

$$\le\frac{2M}{\delta^2}\cdot\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2x^k(1-x)^{n-k}\overset{(2)}{\le}\frac{2M}{\delta^2}\cdot\frac{1}{4n}=\frac{M}{2n\delta^2}\underset{?}{\le}\varepsilon$$

נבחר $n>\dfrac{M}{2\varepsilon\delta^2}$ ונקבל את הדרוש.

הוכחה של (2)

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^kq^{n-k}=(p+q)^n$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}kp^kq^{n-k}=p\frac{d}{dp}(p+q)^n=n(p+q)^{n-1}p$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k^2p^kq^{n-k} = p\frac{d}{dp}\left(np(p+q)^{n-1}\right)$$

$$= np\left((p+q)^{n-1}+(n-1)(p+q)^{n-2}p\right) = np(p+q)^{n-2}\left(p+q+(n-1)p\right)$$

$$p = x \quad , \quad q = 1-x$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}kx^k(1-x)^{n-k} = nx \qquad (3)$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k^2x^k(1-x)^{n-k} = nx(1+(n-1)x) \qquad (4)$$

(1), (3), (4)

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\underbrace{(k-nx)^2}_{k^2-2nk+n^2x^2}x^k(1-x)^{n-k} = \dots = nx(1-x)$$

נחלק ב- n^2 ונקבל את (2).

טורי פונקציות

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}f_n(x) \quad , \quad \sum_{n=0}^{\infty}f_n(x)$$

<u>הגדרה:</u> טור (*) מתכנס במ"ש אם סדרה $S_N(x)=\sum_{n=0}^{N}f_n(x)$ מתכנסת במ"ש.

$f_n : E \to \mathbb{R}$

- $f_n \in C[a,b]$ ו- (*) מתכנס במ"ש ב $[a,b]$ $\Leftarrow$ $f=\sum_{n=0}^{\infty}f_n \in C[a,b]$
- ——— " ——— $\int_a^b f = \sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b f_n$ (!)

<u>הוכחה של (!):</u>

$$S_n \rightrightarrows f \Rightarrow \int_a^b S_n \to \int_a^b f$$

$$\sum_{n=0}^{N}\int_a^b f_n = \int_a^b S_n \;\Downarrow$$

$$\int_a^b f = \sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b f_n$$

- <u>משפט דיני</u>

$f_n \geq 0$, $f_n \in C[a,b]$, $C[a,b] \Rightarrow f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(x)$

אז התכנסות במ"ש $(S_N(x)\uparrow)$

<u>M-test (Weierstrass)</u>

$f_n : E \to \mathbb{R}$ $(f_n : E \to \mathbb{C})$

נניח ש $\sup_E|f_n| \leq M_n$, $\sum_n M_n < \infty$ $\Rightarrow$ אז טור מתכנס במ"ש ב- E.
(בהחלט)

הוכחה :

$$S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} f_n(x)$$

$\forall \varepsilon \; \exists N \; \forall n,m \geq N$?

$m > n$ $\quad \underbrace{\sup_E |S_n - S_m| < \varepsilon}$ (תנאי קושי)

$$= \sup_E \left| \sum_{k=n+1}^{m} f_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \sup_E |f_k| \leq \sum_{n+1}^{m} M_k < \varepsilon$$

לפי Cauchy