2.6.2008

טורי חזקות מרוכבים

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad , a_n \in \mathbb{C} \quad , z \in \mathbb{C}$$

טורים עם איברים מרוכבים

$a_n = u_n + iv_n \in \mathbb{C}$: $a_n \to a = u+iv$ אם $u_n \to u$ וגם $v_n \to v$

כלומר לכל $\varepsilon > 0$ קיים N_ε כך ש $|a_n - a| < \varepsilon$ עבור $n \geq N_\varepsilon$ כאשר

$|u+iv| = \sqrt{u^2+v^2}$ $\quad$ $\boxed{|z+w| \leq |z| + |w|}$

- הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ "מתכנס" אם קיים הגבול $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k \in \mathbb{C}$
- הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ "מתכנס בהחלט" אם $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$

השוואה

אם $a_n \in \mathbb{C}$, $b_n \geq 0$, $|a_n| \leq M b_n$ ו- $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$ אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

(התכנסות בהחלט $\Leftarrow$ התכנסות)

רדיוס התכנסות של טור חזקות $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$

$R \in [0, \infty]$ $\quad$ $\frac{1}{R} := \overline{\lim}\, |a_n|^{\frac{1}{n}}$

משפט

1) הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ מתכנס בהחלט לכל $z \in \mathbb{C}$, $|z| < R$.

2) הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ מתבדר עבור $|z| > R$.

הוכחה של (2)

$$\overline{\lim}\, |a_n z^n|^{\frac{1}{n}} = \overline{\lim}\, |a_n|^{\frac{1}{n}} |z| = \frac{|z|}{R}$$

אם $|z| > R$ אזי $|a_n z^n|^{\frac{1}{n}} > 1$ עבור ∞ פ"מ.

$|a_n z^n| > 1$ ....

$\not\downarrow$

0

אם $|z|<R$ אזי $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n z^n|} = \frac{|z|}{R} < q < 1$

הוכחה של (ה):

$\Leftarrow$ קיים N_0 כך ש $\sqrt[n]{|a_n z^n|} < q$ עבור $n \ge N_0$

$|a_n z^n| < q^n$

$\overset{\text{השוואה}}{\Leftarrow}$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ מתכנס בהחלט עבור $|z|<R$

כפל טורים סופיים: $\sum_{k=1}^{N} a_k \cdot \sum_{l=1}^{N'} b_l = \sum_{\substack{1\le k\le N \\ 1\le l\le N'}} a_k b_l = \sum_{j=1}^{NN'} a_{k_j} b_{l_j}$

פרמוטציות של טורים

פרמוטציה של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ הינה טור מהצורה $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ כאשר $\pi: \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 1-1 ועל.

משפט: אם $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|<\infty$ אזי לכל פונקציה π:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{\pi(n)}|<\infty$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

הוכחה:

1) עבור $n\ge 1$ נסמן $w_n := \max\{\pi(k) : 1\le k\le n\}$

$$\sum_{k=1}^{n} |a_{\pi(k)}| \le \sum_{k=1}^{w_n} |a_k| \le \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$$

2) נסמן $A=\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, צ"ל $\sum_{k=1}^{n} a_{\pi(k)} \xrightarrow[n\to\infty]{} A$

יהי $\varepsilon>0$, נבחר $N_0\ge 1$ כך ש $\sum_{j\ge N_0+1} |a_j| < \varepsilon$

קיים $N_1>N_0$ כך ש- $\{\pi(1),\pi(2),\dots,\pi(N_1)\} \supseteq \{1,\dots,N_0\}$

עבור $n\ge N_1$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{\pi(k)} = \sum_{k=1}^{N_0} a_k + \sum_{\substack{1\le k\le n \\ \pi(k)>N_0}} a_{\pi(k)} = I + II$$

$$|A-I| \le \sum_{k\ge N_0+1} |a_k| < \varepsilon \qquad |II| \le \sum_{\substack{1\le k<n \\ \pi(k)\ge N_0}} |a_{\pi(k)}| \le \sum_{j\ge N_0+1} |a_j| < \varepsilon$$

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_{\pi(k)} - A\right| < 2\varepsilon$$

<u>תוצאה</u>: נניח כי $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|<\infty$, $\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|$ אזי:

1) לכל $(k,l):\mathbb{N}\to\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ חח"ע ועל, מתקיים $\sum_{n=1}^{\infty}|a_{k(n)}b_{l(n)}|<\infty$

2) קיים c כך ש $\sum_{n=1}^{N}a_{k(n)}b_{l(n)}\longrightarrow c$ לכל $(k,l):\mathbb{N}\to\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ חח"ע ועל.

<u>הוכחה של (1)</u>

עבור $N\ge 1$ נסמן $k_N:=\max\{k_1,\dots,k_N,l_1,\dots,l_N\}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|\ge\left(\sum_{i=1}^{k_N}|a_i|\right)\left(\sum_{j=1}^{k_n}|b_j|\right)=\sum_{1\le i,j\le N}|a_i||b_j|\ge\sum_{n=1}^{N}|a_{k(n)}||b_{l(n)}|$$

<u>מסקנה של התוצאה:</u>

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}=c$$

<u>משפט Mertens</u>

נניח כי $a_n,b_n\in\mathbb{C}$ ויהי $c_n:=\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}$,

אם $\sum a_n=A$ מתכנס בהחלט, ו- $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=B$ מתכנס אזי $\sum_{k=1}^{N}c_k\xrightarrow[N\to\infty]{}AB$

<u>הוכחה</u> $A\in A_n:=\sum_{k=1}^{n}a_k$, $B\in B_N=\sum_{k=1}^{N}b_k$, $C_N:=\sum_{k=1}^{N}c_k$

צ"ל: $C_N\xrightarrow[N\to\infty]{}AB$

$$C_N=\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}=\sum_{k=0}^{N}a_k\sum_{n=k}^{N}b_{n-k}=\sum_{k=0}^{N}a_k\sum_{j=0}^{N-k}j=$$

$$=\sum_{k=0}^{N}a_kB_{N-k}$$

$$C_N=\sum_{k=0}^{N}a_kB_{N-k}=\sum_{k=0}^{N}a_kB+\sum_{k=0}^{N}a_k(B_{N-k}-B)$$

מספיק להוכיח כי $U_N:=\sum_{k=0}^{N}a_k(B_{N-k}-B)\xrightarrow{N\to\infty}0$

קיים $M>0$ $|B_n|\le M$ לכל n.

יהיה $\varepsilon>0$:

- קיים N_0 כך ש $\sum_{k\ge N_0+1}|a_k|<\varepsilon$

- קיים N_1 כך ש $|b_n-b|<\varepsilon$ עבור $n>N_1$.

עבור $n>N_0+N_1$.

$$|u_n| \le \sum_{k=0}^{n}|a_k||b_{n-k}-b| = \sum_{k=0}^{N_0}|a_k||b_{n-k}-b| + \sum_{k=N_0+1}^{n}|a_k|\underbrace{|b_{n-k}-b|}_{\le 2M} < \varepsilon\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|+2M\varepsilon$$

תוצאה

נניח כי $A(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_nz^n$ רדיוס התכנסות $R_A>0$

$B(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n$ — — — — $R_B>0$

יהיה $c_n:=\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}$ אזי עבור $|z|<\min\{R_A,R_B\}$

$$\sum_{k=0}^{n}c_kz^k \xrightarrow[n\to\infty]{} A(z)B(z)$$

הוכחה: mertens $\sum_{k=0}^{n}(a_kz^k)(b_{n-k}z^{n-k})=c_nz^n$

נגזרות מרוכבות

עבור $z\in\mathbb{C}$, $R>0$ $B(z,R):=\{w\in\mathbb{C},\ |z-w|<R\}$.

נניח כי $f:B(w,R)\to\mathbb{C}$ ויהיה $z_0\in B$.

נאמר כי f גזיר ב- z_0 אם קיים $c\in\mathbb{C}$ כך ש $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\xrightarrow[z\to z_0]{} c$

כלומר לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך ש

$$\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right|-c<\varepsilon \quad \text{כאשר } z\in B,\ 0<|z-z_0|<\delta.$$

$c=f'(z_0)$ יהיה הנגזרת של f ב- z_0

דוגמא,

עבור $n\in\mathbb{N}$ נגדיר $E_n:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $E_n(z):=z^n$ אז

E_n $\mathbb{C}$-גזיר ב- $\mathbb{C}$ ו $E_n'=nz^{n-1}$

הוכחה:

$$E_n(y)-E_n(x)=y^n-x^n=(y-x)\cdot\sum_{k=0}^{n-1}x^k y^{n-k-1}$$

$$(y\neq x)\quad \frac{E_n(y)-E_n(x)}{y-x}=\sum_{k=0}^{n-1}x^k y^{n-k-1}\xrightarrow[\substack{y\to x\\ y\neq x}]{} nx^{n-1}$$

פעולות אלגבריות

נניח כי $u,v:B\to\mathbb{C}$ $\mathbb{C}$-גזירות ב $z_0\in B$.

אזי

1) לכל $a,b\in\mathbb{C}$ ו $au+bv$ $\mathbb{C}$ גזירה $(au+bv)'(z_0)=au'(z_0)+bv'(z_0)$

2) uv $\mathbb{C}$ - גזירה בz_0 $(uv)'(z_0)=u(z_0)v'(z_0)+u'(z_0)v(z_0)$

3) אם $v(z_0)\neq 0$ אזי $\frac{u}{v}$ $\mathbb{C}$ גזיר ב- z_0 ו-

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(z_0)=\frac{u'(z_0)v(z_0)-u(z_0)v'(z_0)}{v(z_0)^2}$$

2.6.08

חדו"א 2 – שיעור
(1) 02.06.08

טורי חזקות מרוכבים

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ כאשר $a_n, z \in \mathbb{C}$

סדרות של מספרים מרוכבים

סדרות:

$a_n = u_n + iv_n$. a_n טור מתכנס אם החלק הממשי מתכנס וגם החלק המדומה מתכנס

$$a_n \longrightarrow u+iv \quad \longleftrightarrow \quad u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} u, \quad v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} v$$

הגדרת אפסילון לזה תהיה: $\forall \varepsilon>0.\ \exists N_\varepsilon.\ \forall n>N_\varepsilon.\ |a_n-a|<\varepsilon$

⚠ שימו לב- ההגדרה של ערך מוחלט היא שונה $|u+vi| = \sqrt{u^2+v^2}$

כאשר תנאי אי שוויון המשולש מתקיים $|z+w| \le |z|+|w|$

טורים:

הגדרה- הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אם קיים הגבול $\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\in\mathbb{C}$

התכנסות בהחלט של טורים מרוכבים - הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט אם $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ מתכנס בהחלט.

מבחן ההשוואה- אם $a_n\in\mathbb{C}$ וגם $b_n\ge 0$ וגם קיים $M>0$ כך ש $\forall n. |a_n|\le Mb_n$ וגם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n<\infty$ אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס ואפילו יותר שמתכנס בהחלט גורר התכנסות.

חזרה לטורי חזקות מרוכבים...

רדיוס התכנסות של טורי חזקות $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$

רדיוס התכנסות- $\frac{1}{R} = \overline{\lim}\,|a_n|^{\frac{1}{n}}$

טענה: (1) הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ מתכנס בהחלט מתכנס לכל $z\in\mathbb{C}$ כך ש $|z|<R$

(2) הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ מתבדר לכל $z\in\mathbb{C}$ כך ש $|z|>R$

עבור $|z|=R$ יש כאלו שמתכנסים, אחרים שמתבדרים, וגם שמתכנסים בתנאי...

הוכחה- (2) נשתמש במבחן השורש והעמוד ב $|a_n z^n|^{\frac{1}{n}} = |a_n|^{\frac{1}{n}}\cdot|z| \Leftarrow \overline{\lim}_{n\to\infty} = \frac{|z|}{R}$

אם $|z|>R$ אזי $|a_n z^n|^{\frac{1}{n}}>1$ עבור ∞ ח-מ ומכאן $|a_n z^n|>1$

ומכאן שהאיבר הכללי של הטור לא מתכנס ל-0 ולכן הטור מתבדר.

(1) אם $|z|<R$ אזי נניח ש $|z|<R$: $\overline{\lim}\,|a_n z^n|^{\frac{1}{n}} = \frac{|z|}{R} < q < 1$

אזי קיים מקום N_0 כך ש $\forall n\ge N_0$ מתקיים $|a_n z^n|^{\frac{1}{n}} < q$

$|a_n z^n| < q^n < 1$

וממבחן ההשוואה משום ש q טור מתכנס, כך גם $|a_n z^n|$ טור מתכנס בהחלט.

מכפלה של טורים מתכנסים

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \cdot \sum_{l=0}^{N} b_l = \sum_{\substack{0\le l\le N \\ 0\le k\le N}} a_k b_l$$

האם טור זה מתכנס על הנ"ל מהנחה שהטורים $\sum a_n , \sum b_n$ מתכנסים?

$$\sum_{k=1}^{N} a_k \sum_{l=1}^{N'} b_l = \sum_{\substack{k=1\\l=1}}^{N,N'} a_k b_l = \sum_{j=1}^{N\cdot N'} a_{k_j} b_{l_j}$$

כאשר נסמן: $\mathbb{Z}^2 \cap [1,N]\times[1,N'] = \{k_j, l_j\}_{0\le j\le N\cdot N'}$

נשנה את הפרמוטציה של איברי הטור בתוך המכפלה.

פרמוטציה של טור Rearrangement

פרמוטציה של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ היא טור מהצורה $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ כאשר $\pi : \mathbb{N}\to\mathbb{N}$
π: העתקה חח"ע ועל

משפט - אם $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ אז לכל פרמוטציה π מתקיים: (1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} < \infty$ כלומר שפרמוטציה

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} \quad (2)$$

הוכחה - (1) לכל $n\ge 1$ נסמן $\omega_n := \max\{\pi(k), 1\le k\le n\}$
משום ש-π פרמוטציה חח"ע אז האיברים שונים זה מזה.

$$\sum_{k=1}^{n} a_{\pi(k)} \le \sum_{k=1}^{\omega_n} |a_k| \le \sum_{k=1}^{\infty} |a_n| < \infty$$

משום שאנו סוכמים רק חלק מהאיברים, כאשר שמתקיים. מהחסם ניתן לראות שהטור הנ"ל חסום ולכן מתכנס.

(2) נסמן $A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

צ"ל: $\sum_{k=1}^{n} a_{\pi(k)} \xrightarrow[n\to\infty]{} A$

יהי $\varepsilon>0$! N_0 כך שמתקיים $\sum_{j>N_0+1} |a_j| < \varepsilon$ (הזנבות של הטור מתכנסים ל-0)

קיים $N_1 > N_0$ כך ש $\{\pi(1), \pi(2) \dots \pi(N_1)\}$ מכיל את כל המספרים עד N_0

לכל $n > N_1$ מתקיים השוויון:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{\pi(k)} = \sum_{k=1}^{N_0} a_k + \sum_{\substack{1\le k\le n \\ \text{כך ש} \\ \pi(k) > N_0}} a_{\pi(k)}$$

הסכום השני הוא הגורם לסכום הזנבות שראינו קודם והוא מתכנס ל-0.

$$\left|A - \sum_{\substack{1\le k\le n \\ \text{כך ש} \\ \pi(k)>N_0}} a_{\pi(k)}\right| \le \sum_{k\ge N_0+1}^{n} |a_k| < \varepsilon$$

* הסכום השני התכנס שוב אל הטור A משום דרגת הזנבות. לכן $|A-\sum| < \varepsilon$.

$$\sum_{k=1}^{N_0} a_{\pi(k)} \le \sum_{\substack{1\le k\le n \\ \pi(k)>N_0}} |a_{\pi(k)}| \le \sum_{j>N_0+1} |a_j| < \varepsilon$$

מכאן משני הסכומים:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_{\pi(k)} - A\right| < 2\varepsilon$$

דוגמא לפרמוטציה של טור מתכנס -

עבור הטור לייבניץ: $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots$

ובפרמוטציה: $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{2}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}\dots$

נניח כי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$; $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנסות בהחלט. אזי:

(1) לכל $(k,l):\mathbb{N}\to\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ חח"ע ועל $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ הטור $\sum_{n=1}^{\infty}|a_{k(n)}\cdot b_{l(n)}|<\infty$

(2) קיים C כך ש- $\sum_{n=1}^{N} a_{k(n)} b_{l(n)} \to C$ לכל k ו- l.

הוכחה:

(1) נקבע $N\geq 1$. $k_N := \max\{k_1,\dots,k_n, l_1,\dots,l_n\}$ (נשמר k_n כך ש...)

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|}_{} \geq \left(\sum_{i=1}^{k_N}|a_i|\right)\left(\sum_{j=1}^{k_N}|b_j|\right) = \sum_{1\le j,i\le k_N}|a_i||b_j| \geq \sum_{n=1}^{N}|a_{k(n)}|\cdot|b_{l(n)}|$$

(כמה חלק מהמכפלה)

מתכנס, לפחות לא מכפלה של 2 טורים משום שנתון $\sum|a_n|<\infty$ וגם $\sum|b_n|<\infty$

משום ש-k,l חח"ע לא ניתן ש- $k(n), l(n)$ ... רק פעם אחת לכל $1\le n\le N$ אין הכפלה באמצע.

(2) נובע ישירות מהמשפט שלנו על כך ש- $\sum a_{\sigma(n)} = \sum a_n$ אז קבוע $C = \sum a_n b_n = \sum|a_{l(n)}\cdot b_{k(n)}|$ ...

אם מתייחסים לטור הכפלה אנחנו של סדר מתכנס C.
החל (מתייחס) לא קיים השאלה

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k\cdot b_{n-k} = (a_0b_0)+(a_0b_1+a_1b_0)+\dots = C$$

משפט Mertens

נניח כי $a_n, b_n\in\mathbb{C}$ ו- $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.
אם $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$ מתכנס בהחלט ו- $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$ מתכנס (לאו דווקא בהחלט) אז $\sum_{k=1}^{N} c_k \xrightarrow[N\to\infty]{} AB$.

הוכחה –

(נסמן) $A_N=\sum_{k=0}^N a_k$, $B_N = \sum_{k=0}^N b_k$, $C_N = \sum_{k=0}^N c_k$

צ"ל $C_N \xrightarrow[N\to\infty]{} A\cdot B$ (נתון הדבר ש- $A_N\xrightarrow[N\to\infty]{}A$, $B_N\xrightarrow[N\to\infty]{}B$)

נחשב את C_N:

$$C_N = \sum_{k=0}^N c_k = \sum_{n=0}^N\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^N a_k\sum_{n=k}^N b_{n-k} = \sum_{k=0}^N a_k\sum_{j=0}^{N-k} b_j =$$

$$= \sum_{k=0}^N a_k B_{N-k}$$

אז B_n שואף ל-B ולכן:

$$C_N = \sum_{k=0}^N a_k B_{N-k} = \sum_{k=0}^N a_k B + \sum_{k=0}^N a_k(B_{N-k}-B) \xrightarrow[N\to\infty]{} A\cdot B + \sum_{k=0} a_k(B_{N-k}-B)$$

רק נשאר לנו להוכיח $\sum_{k=0}^N a_k(B_{N-k}-B) \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$

קיים $M>0$ כך ש- $|B_n|\le M$ (סדרה מתכנסת היא חסומה) לכל n.
יהי $\varepsilon>0$ קיים N_0 כך ש- $\forall n>N_0$ מתקיים $\sum_{k=n}^{\infty}|a_k|<\varepsilon$ (ההגדרה מתכנסת)
וגם קיים N_1 כך ש- $|B_n-B|<\varepsilon$ $\forall n>N_1$ (הגדרה של הגבול "המתכנס B")

נניח שהגענו ל-n גדול מספיק $n>N_0+N_1$

$$\left|\sum_{k=0}^N a_k(B_{N-k}-B)\right| \le \sum_{k=0}^n|a_k|\cdot|B_{n-k}-B| = \sum_{k=0}^{N_0}|a_k||B_{n-k}-B| + \sum_{k=N_0+1}^{n}|a_k||B_{n-k}-B|$$

יש לנו אלה הטור לשני סכומים. נראה כי כל אחד מהם קטן מ-ε כפול קבוע.

בשלב א הטענה הראשון כי $B_{n-k}\xrightarrow[k\to 0]{} B$

$$\sum_{k=0}^{N_0}|a_k||B_{n-k}-B| < \varepsilon\cdot\sum_{k=0}^{\infty}|a_k| = \varepsilon\cdot const$$

וכן הטענה השניה היא ε.

$$\sum_{k=N_0+1}^{n}|a_k||B_{n-k}-B| < \varepsilon\cdot 2M$$

(זכרנו ש- $|B_n|<M$ לכל n ולכן ההפרש חסום ע"י $2M$)
והטור של a_n מתכנס, הזנב קטן מ-ε.