אלגברה לינארית 2 - תרגול 3

תרגיל: $f(x)\in \mathbb{R}[x]$ עם שורש מרוכב z. הוכח ש $\bar{z}$ שורש של f.

הוכחה: נכתוב $f(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$

$$f(\bar{z})=\sum_{i=0}^{n} a_i \bar{z}^i \underset{a_i\in\mathbb{R}}{=} \sum_{i=0}^{n} \bar{a}_i \bar{z}^i = \overline{\sum_{i=0}^{n} a_i z^i} = \bar{0} = 0$$

תרגיל: מצא את כל האוטומורפיזם של $\mathbb{Z}[i]$

פתרון: הזהות והצמדה הם אוטומורפיזם ונראה שהם כולם.
נניח ש φ אוטו' של $\mathbb{Z}[i]$. לכל $n\in\mathbb{N}$,

$$\varphi(n)=\varphi(\underbrace{1+\dots+1}_{n\text{ פעמים}})=\underbrace{\varphi(1)+\dots+\varphi(1)}_{n\text{ פעמים}}=1+\dots+1=n$$

$$\varphi(-n)=-\varphi(n)=-n$$

קיבלנו שלכל $k\in\mathbb{Z}$ $\varphi(k)=k$.

$$\varphi(i)^2+1=\varphi(i^2)+\varphi(1)=\varphi(i^2+1)=\varphi(0)=0 \quad \Leftarrow \quad i^2+1=0$$

$$\Leftarrow \quad \boxed{\varphi(i)=\pm i}$$

$$\varphi(a+ib)=\varphi(a)+\varphi(i)\varphi(b)=a+\varphi(i)b$$

לכן יש 2 אפשרויות:

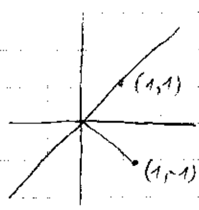
$$\varphi(a+ib)=a+ib$$

$$\varphi(a-ib)=a-ib$$

קיבלנו זהות והצמדה.

צורות של העתקות

בסיס כללי: העתקה $T:V\to V$ היא בעלת הצגה אלכסונית אם קיים בסיס $v_1,\dots,v_k$ כך ש $T(v_i)=\alpha_i v_i$.
(כלומר, המטריצה המייצגת בבסיס $\{v_1,\dots,v_n\}$ היא $\begin{pmatrix}\alpha_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n\end{pmatrix}$)



$T(\overset{v_1}{1,1})=(1,1)$

$T(\overset{v_2}{1,-1})=-(1,-1)$

$T(v_1)=1\cdot v_1+0\cdot v_2$

$T(v_2)=0\cdot v_1+(-1)\cdot v_2$

$[T]=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$

* שתי מטריצות מתארות את אותה העתקה אם"ם הן דומות.

השאלה הבאה במונחי מטריצות:
נתונה מטריצה $A\in M_n(F)$. האם קיימת מטריצה הפיכה P כך ש $P^{-1}AP$ אלכסונית.

* וקטורים שעוברים לעצמם עד כדי קבוע נקראים וקטורים עצמיים וה α_i שמכפילים את הוקטורים הללו הם ערכים עצמיים.

דוגמה: נתונות $A=\begin{pmatrix}-7&8\\-6&7\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&-3&3\\-1&0&-2\end{pmatrix}$

א. מצא את הערכים העצמיים של A,B.

אלגברה לינארית 2 - תרגול 3

תזכורת: λ ע"ע של A $\Leftrightarrow$ קיים $v\neq 0$ כך ש $Av=\lambda v \Leftrightarrow |A-\lambda I|=0 \Leftrightarrow$ λ שורש של הפולינום האופייני של A

נחשב פולינום אופייני:

$$f_A(x)=|xI-A| = \left|\begin{pmatrix} x & 0\\ 0 & x\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 & 8\\ -6 & 7\end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} x+7 & -8\\ 6 & x-7\end{vmatrix}$$

$= x^2-49+48 = x^2-1 = (x+1)(x-1) \Rightarrow$ הערכים העצמיים של A הם $-1, 1$

$$f_B(x) = \begin{vmatrix} x-2 & 1 & -2\\ -5 & x+3 & -3\\ 1 & 0 & x+2\end{vmatrix} \underset{\text{לפי שורה 3}}{=} \begin{vmatrix} 1 & -2\\ x+3 & -3\end{vmatrix} + (x+2)\begin{vmatrix} x-2 & 1\\ -5 & x+3\end{vmatrix}$$

$$= -3 -2(x+3) + (x+2)\left[(x-2)(x+3)+5\right] = -3+2x+6+(x+2)(x^2+x-1)$$

$$= x^3+3x^2+x-2-3+2x+6 = x^3+3x^2+3x+1 = (x+1)^3$$

לכן -1 הוא הערך העצמי היחיד של B.

ב. לכל ערך עצמי של A,B נחשב את המרחב העצמי שלו.

תזכורת: אם A מטריצה, λ סקלר, נסמן: $V_\lambda=\{v \mid Av=\lambda v\}$
אם V_λ הוא לא רק 0, אומרים ש λ הוא ערך עצמי של A ו- V_λ נקרא המרחב העצמי (הספקטרלי) של λ.

נשים לב: $V_\lambda=\{v \mid (A-\lambda I)v=0\}$

נחשב את המרחבים העצמיים:

$$V_{-1}=\{v \mid (A+I)v=0\}$$

$$A+I = \begin{pmatrix} -6 & 8\\ -6 & 8\end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -6 & 8 & 0\\ -6 & 8 & 0\end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -4 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

$$V_{-1}=\{(\tfrac{4}{3}s, s) \mid s\in\mathbb{R}\}$$

(*) ת.ב. (תבדקו את V_1, כנ"ל עם המטריצה B)

ג. נחשב את הפולינום המינימלי של A,B.

תזכורת (1) אם $f(x)\in F[x]$, $A\in M_n(F)$

$$f(x)=a_nx^n+\dots+a_1x+a_0 \Rightarrow f(A)=a_nA^n+\dots+a_1A+a_0I$$

משפט קיילי-המילטון: אם f_A הפולינום האופייני של A, אזי $f_A(A)=0$.

הפולינום המינימלי של A הוא הפולינום המתוקן בעל המעלה המינימלית שמתאפס על A.

(2) I. הפולינום המינימלי מחלק את האופייני.

II. כל שורש של הפולינום האופייני הוא שורש של המינימלי, כלומר אם $x-\alpha \mid f_A$ אזי $x-\alpha \mid m_A$.

ג. ⊛ $A=\begin{pmatrix}7&8\\-6&-7\end{pmatrix}$ $\quad f_A(x)=x^2-1=(x+1)(x-1)$

I. $m_A \mid (x-1)(x+1)$

II. $x+1 \mid m_A \,,\, x-1 \Rightarrow (x+1)(x+1)\mid m_A$

$m_A=(x+1)(x-1)$

⊛ $B=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&-3&3\\-1&0&-2\end{pmatrix}$ $\quad f_B(x)=(x+1)^3$

I. $m_A \mid (x+1)^3 \Rightarrow m_A=\cancel{1},\cancel{x+1},\cancel{(x+1)^2},(x+1)^3$

ל- 1 אין שורש, (לפולינום המינימלי חייב להיות השורש (-1)) ⇐ 1 אינו הפולינום המינימלי.

II. $B+I\neq 0 \Rightarrow x+1$ אינו הפולינום המינימלי.

נבדוק עתה האם $(x+1)^2$ הוא הפולינום המינימלי. נציב את B בתוך הפולינום ונראה האם מתקבל 0:

$$(B+I)^2=\begin{pmatrix}3&-1&2\\5&-2&3\\-1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-1&2\\5&-2&3\\-1&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&*&*\\1&*&*\\*&*&*\end{pmatrix}\neq 0 \Rightarrow$$ $(x+1)^2$ לא הפולינום המינימלי.

פסלנו את כל האפשרויות פרט ל- $(x+1)^3$ ולכן הוא הפולינום המינימלי.

תרגיל: יהי $f\in F[x]$, $A\in M_n(x)$ אז $f(A^t)=f(A)^t$.

הוכחה: $f(x)=a_nx^n+\dots+a_1x+a_0$ אז

$$f(A^t)=a_n(A^t)^n+\dots+(A^t)a_1+a_0I=a_n(A^n)^t+\dots+a_0I^t$$
$$=(a_n\cdot A^n)^t+\dots+(Aa_1)^t+(a_0I)^t=f(A)^t$$

מסקנה: ל- A ו- A^t אותו פולינום מינימלי.

הוכחה: פולינום מתאפס ע"י A אמ"מ f מתחלק בפולינום המינימלי. (נסמן ב- m את המינימלי של A וב- m' את המינימלי של A^t.

לכן, מצד אחד $m(A^t)=m(A)^t=0^t=0 \Rightarrow m'\mid m$

ומצד שני, באותו האופן $m\mid m'$ ומכאן $\boxed{m=m'}$. מש"ל ⊠

תרגיל: אם $f\in F[x]$, λ ע"ע של A. הוכח ש- $f(\lambda)$ ע"ע של $f(A)$.

הוכחה: יש $v\neq 0$ כך ש- $Av=\lambda v$.

$$f(A)\cdot v=(a_n\cdot A^n+\dots+a_1A+a_0I)\cdot v=a_n(A^nv)+\dots+a_1(Av)+a_0v=$$
$$\stackrel{*}{=}a_n\lambda^nv+\dots+a_1\lambda v+a_0v=(a_n\lambda^n+\dots+a_0)v=f(\lambda)v$$

$* \Leftarrow Av=\lambda v$
$A^2v=A(\lambda v)=\lambda(Av)=\lambda^2v$
באינדוקציה ניתן להוכיח ל- n

ולכן $f(\lambda)$ הוא ערך עצמי של $F(A)$.

אלגברה לינארית 2 - תרגול 3

ב: $f(A)=0$ ⇐ כל ע"ע של A שורש של f

הוכחה: אם λ ע"ע של A אזי קיים $v\neq 0$ כך ש- $Av=\lambda v$,

$0=f(A)\cdot v=f(\lambda)\cdot v \Rightarrow f(\lambda)=0 \Rightarrow$ λ הוא שורש.

מש"ל

ג: נניח $A\in M_n(\mathbb{R})$, $A^{-1}=I-A$ הוכיחו של-A אין ע"ע וש-n זוגי.

פתרון:

$$A^2-A+I=0 \Leftarrow I=A-A^2 \underset{\text{נכפול ב-}A}{\Leftarrow} A^{-1}=I-A$$

הפולינום $f(x)=x^2-x+1$ מאפס את A לכן אם $\lambda\in\mathbb{R}$ ע"ע של A אזי λ שורש של x^2-x+1 אבל ל- x^2-x+1 אין שורשים ב-$\mathbb{R}$! סתירה! לכן אין ל-A ע"ע.

הפולינום האופייני של A הוא ממעלה n. כיוון שאין לפולינום הזה שורש (ב-$\mathbb{R}$) נובע ש n זוגי (חדו"א).

תרגיל: $A\in M_n(F)$ הפיכה, עם פולינום מינימלי: $a_0+a_1x+\dots+x^k$
מצא את $m_{A^{-1}}(x)$.

פתרון:

$$A^k+a_{k-1}A^{k-1}+\dots+a_1A+a_0I \underset{\text{נכפול ב-}A^{-k}}{\Rightarrow} a_0A^{-k}+a_1A^{-k+1}+\dots+a_{k-1}A^{-1}+I=0$$

$$\Rightarrow a_0(A^{-1})^k+\dots+a_{k-1}(A^{-1})+I$$

כלומר A^{-1} מאפסת את הפולינום $a_0x^k+a_1x^{k-1}+\dots+a_{k-1}x+1$, ולכן A^{-1} מאפסת את $f=x^k+\frac{a_1}{a_0}x^{k-1}+\dots+\frac{a_{k-1}}{a_0}x+\frac{1}{a_0}$.

הערה: $a_0\neq 0$ - לבדוק בבית (רמז: דטרמיננטה).

אזי: $f(A^{-1})=0$. אם יש פולינום g ממעלה $l<k$ כך ש $g(A^{-1})=0$ היינו יכולים לבנות פולינום ממעלה l שמתאפס ע"י A (ע"י אותו תעלול). וזו סתירה למינימליות. לכן f הוא הפולינום המינימלי של A^{-1}.

שאלת מחשבה: סדרת פיבונאצ'י $(a_0=0,\ a_1=1,\ a_i=a_{i-1}+a_{i-2})$

מצא נוסחה לאיבר הכללי בסדרת פיבונאצ'י.