25/11/08

מודלים חישוביים - תרגול 4

תזכורת:

RE: עבור תוכניות שהן פרדיקטים נגדיר: $L(p)=\{x \mid p(x)=T\}$

המילים אותן השפה של p מכריעה/מחזירה/מקבלת

תרגיל:

הראו שהשפה $L_{\bar{R}}=\{\langle p\rangle \mid L(p)\notin R\}$ אינה כריעה.

נראה רדוקציה: $Halt \le L_{\bar{R}}$ בהינתן קלט $\langle p,x\rangle$ ל-Halt

נחשב קלט 'p ל-$L_{\bar{R}}$ כך ש-$\langle p,x\rangle \in Halt$ אמ"מ $\langle p'\rangle \in L_{\bar{R}}$.

נגדיר תוכנית עזר P_{Halt_ε}: $P_{Halt_\varepsilon}(q)=I(q,\varepsilon), \text{return } T;$

$$L(P_{Halt_\varepsilon})=Halt_\varepsilon=\{\langle q\rangle \mid q \text{ halts on } \varepsilon\}\notin R$$

השפה של P_{Halt_ε} לא כריעה. השפה של תוכנית: הקלטים שהיא מחזירה עבורם T, כלומר מה שהיא מכריעה/מכריעה/מחזירה.

$$\langle p,x\rangle \xrightarrow{f} \langle p'\rangle$$

$$f(p,x):=p'(y)=\text{if } \underbrace{I(p,x)}_{p(x)\text{ מריצה את}}, \text{return } P_{Halt_\varepsilon}(y);$$

הכל נתון ולכן אין צורך להחזיר

אם $p(x)$ עוצרת אזי מחזירים $P_{Halt_\varepsilon}(y)$

אם $p(x)$ לא עוצר השפה של 'p היא השפה הריקה, לא מחזירה לעולם

אם $p(x)$ עוצרת אזי $p'(y)\equiv P_{Halt_\varepsilon}(y)$ והשפה של P_{Halt_ε} לא כריעה.

הוכחת נכונות:

1. f חשיבה - מעתיקים קוד של I ו-P_{Halt_ε}!
2. נניח ש-$p(x)\in Halt$ אזי p עוצרת על x אזי 'p תריץ את P_{Halt_ε} על הקלט y אזי $p'\equiv P_{Halt_\varepsilon}$, לכן $Halt_\varepsilon=L(p')=L(P_{Halt_\varepsilon})\notin R$, אזי $p'\in L_{\bar{R}}$.

$\langle p,x\rangle\notin Halt$ אזי p לא עוצרת על x ולכן $L(p')=\emptyset$

ולכן $L(p')\in R$ אזי $p'\notin L_{\bar{R}}$.

תרגיל:

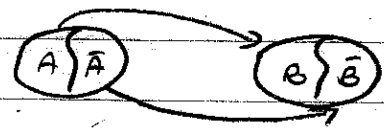
הוכח $A \le_m B$ אמ"מ $\bar{A} \le_m \bar{B}$

פתרון:

תהי $A \le_m B$ אזי קיימת פונק' חשיבה f כך ש: $x\in A$ אמ"מ $f(x)\in B$. אזי $x\notin A$ אמ"מ $f(x)\notin B$. אזי $x\in\bar{A}$ אמ"מ $f(x)\in\bar{B}$.

הגדרת המושג

אזי f היא רדוקציית מיפוי מ $\bar{A}\le_m\bar{B}$, וזוהי אותה פונק' הרדוקציה מיפוי. הכיוון השני זהה: כי $\bar{\bar{B}}=B, \bar{\bar{A}}=A$



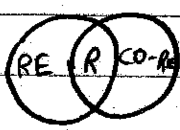
תזכורת:

נאמר שתוכנית מקבלת/ מכריעה למחצה שפה L:

אם $x\in L$ אז P מקבלת את x. $P(x)=T$

אם $x\notin L$ אז P דוחה את x, או לא עוצרת $P(x)=F/\perp$

RE: מחלקת השפות שניתנות להכרעה למחצה



תרגיל: $R= RE\cap CO\text{-}RE$

$L\in CO\text{-}RE$ אמ"מ $\bar{L}\in RE$

כיוון ראשון $RE\cap CO\text{-}RE\subseteq R$

נכון כי אם $L,\bar{L}\in RE$ אז $L\in R$.

לא כריעה למחצה

$R\subseteq RE\cap CO\text{-}RE$; $R\subseteq RE$ אם $L\in R$ אזי קיימת תוכנית P שמכריעה אותה אזי P מכריעה את L גם למחצה ולכן $L\in RE$.

$R\subseteq CO\text{-}RE$: תהי $L\in R$ אזי $\bar{L}\in R$ אזי $\bar{L}\in RE$ אזי $L\in CO\text{-}RE$. R סגורה למשלים

הבחנות:

$L\in RE\setminus R$

① $L,\bar{L}\in R$ ② $\bar{L}\in CO\text{-}RE\setminus R$ ③ $L,\bar{L}\notin RE\cup CO\text{-}RE$

משפט: אם $A\le_m B$; $A\notin RE$ אז $B\notin RE$ שיעור תרגול 2

מסקנה $A\notin CO\text{-}RE$ אז $B\notin CO\text{-}RE$

$A\notin R$ אז $B\notin R$

* מתעסקים בעיקר ברדוקציות מיפוי.

- תרגיל: ① $Halt_\varepsilon \in RE \setminus R$

② קבע האם $Halt_\varepsilon = \{\langle p\rangle \mid p \text{ Halts on } \varepsilon\}$

ב- R / RE / co-RE / אף אחד?

פתרון:

ראינו בתרגול ש $Halt_\varepsilon \notin R$, נראה שהיא שייכת ל- RE

נראה תוכנית $p_{Halt_\varepsilon}(q) = I(q,\varepsilon)$. return T;

נכונות: אם $q \in Halt_\varepsilon$ אז $I(q,\varepsilon)$ תעצור ונחזיר T

אזי $p_{Halt_\varepsilon}(q)=T$, אם $q \notin Halt_\varepsilon$ אזי $I(q,\varepsilon)$

לא תעצור ולכן $p_{Halt_\varepsilon}(q)=\bot$ כנדרש.

- תרגיל: קבע האם $Fin=\{\langle p\rangle \mid p \text{ halts on a finite number of inputs}\}$

האם היא ב- R / RE / co-RE / אף אחד.

פתרון:

ראינו רדוקציה $Halt \le_m Fin$. אזי גם רדוקציה $\overline{Halt} \le_m \overline{Fin}$

אזי כיוון ש $\overline{Halt} \notin RE$, $\overline{Fin} \notin RE \Rightarrow Fin \notin co\text{-}RE$

ניתן להראות רדוקציה $\overline{Halt} \le_m Fin$ ובדוק!!

$f(p,x) := p'(y) = I(p,x)$

(p לא עוצר על x, השפה היא ריקה סופי. p עוצר על x, השפה היא כל התחום)

מכאן נובע ש $Fin \notin RE$ כיוון $\overline{Halt} \notin RE$!

רדוקציה למשהו מפונק, והמשלים שלה מראה שבה לא ב-RE ולא ב- co-RE

- תרגיל: הראה שהשפה: $L=\{\langle p,x\rangle \mid p \text{ Halts on } x \text{ and } \exists y.\ p(x)=p(y),\ x \neq y\} \in R$

פתרון: נראה אלגוריתם ① נריץ את p על x $I(p,x)$

② נזכור את התוצאה ③ נריץ על ה הקלטים פרט ל x באופן הבא:

עבור $i=1 \dots \infty$ נריץ על $\underbrace{S_1 \dots S_i}_{\text{הקלטים}}$ ומשך i צעדים

זוהי שיטת השבלון. על ה הכל עבור בסוף את ה הצעדים,

ומשיך עבור על ה הצעדים וכך קדימה.

נכונות: ① אם $\langle p,x\rangle \in L$ אז p עוצר על x ולכן

ולכן נגיע לשלב 3. כמו כן קיים S_k כך ש

$P(S_k)=P(x)$ ו- $P(S_k)$ עוצר תוך m צעדים,
אז כאשר $i=\max\{k,m\}$ נחזיר T.

② אם $\langle P,x\rangle \notin L$ אזי או ש-P לא עוצר על x
ונמבר או שנרוץ עם i עד אינסוף ולכן נמבר.