

מחלקת חישוביות-תורת ד

מבוא למחלקת

המבנה של מחלקת פונקציות M נגזר מ- M ו- n זמן או ממחלקת $DTime(T(n))$ כאשר n הוא אורך הקלט.
 לדוגמה: P היא המחלקת של פונקציות שניתן לחשבן בזמן $O(n)$, כאשר n הוא אורך הקלט.
 דוגמה: NP היא המחלקת של פונקציות שניתן לחשבן בזמן $O(n^c)$.

$$P = \bigcup_{c \geq 1} DTIME(n^c)$$

המחלקת P היא המחלקת של פונקציות שניתן לחשבן בזמן $O(n^c)$.

(ב) P הוא קבוצת הבעיות שניתן לחשבן בזמן $O(n^c)$ (אם צריך יותר זמן, פולינומלי, זה אורך אחר).

מחלקת NP (Karp 1972)

המחלקת NP היא המחלקת של פונקציות שניתן לחשבן בזמן $O(n^c)$ אם נעזרים במחשבון אמצעי.
 (אורך הקלט) n הוא אורך המפתח x ו- $M(x)$ הוא המפתח x שמייצר את y .
 זמן החישוב הוא $O(n^c)$.
 זמן החישוב הוא $O(n^c)$ ו- x הוא המפתח x שמייצר את y .
 זמן החישוב הוא $O(n^c)$ ו- x הוא המפתח x שמייצר את y .

צמצום

1. IS (independent set) בעיה של מחשבון A , האם יש קבוצת צמתים קבוצת A .

האם ניתן להעביר את בעיה A לבעיה B ? האם $A \leq B$?

האם $A \leq B$? A הוא בעיה של מחשבון A , x הוא המפתח x שמייצר את y .

ה- NP ניתן להעביר את בעיה A לבעיה B , x הוא המפתח x שמייצר את y .

$$CNF = \bigwedge_{i=1}^m (\bigvee_{j=1}^n x_{ij})$$

2. SAT (satisfiability) בעיה של מחשבון A , האם יש מפתח x שמייצר את y ?

האם $A \leq B$? A הוא בעיה של מחשבון A , x הוא המפתח x שמייצר את y .

האם ניתן להעביר את בעיה A לבעיה B , x הוא המפתח x שמייצר את y .

קבוצת D (פולינומלי, כי רק מחשבון).

$$EXP = \bigcup_{c \geq 1} DTIME(2^{n^c}) \quad P \subseteq NP \subseteq EXP$$

המחלקת P היא המחלקת של פונקציות שניתן לחשבן בזמן $O(n^c)$.
 המחלקת NP היא המחלקת של פונקציות שניתן לחשבן בזמן $O(n^c)$ אם נעזרים במחשבון אמצעי.
 המחלקת EXP היא המחלקת של פונקציות שניתן לחשבן בזמן $O(2^{n^c})$.

NP ⊆ EXP : גודלו של LEXP הוא קטן מן המעמד של ω
 בעזרת פונקציה פולינומית p(x) ופונקציה XEL
 (היא רצופה ופונקציה של x) p(x) ← x (היא רצופה ופונקציה של x)
 M(x, y) = ... (היא רצופה ופונקציה של x, y)

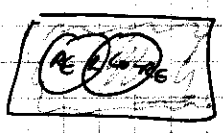
P=NP נכונה

היא מתקיימת או כן כביכול היא נכונה או לא האפשרות

RE = HALT → RE = RE → HALT

כן, HALT → RE → RE → HALT, אבל, היא לא כזו, E* (היא)

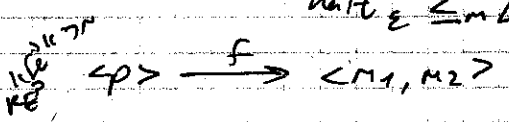
RE ≠ co-RE



אם $\forall x \in \mathbb{N}$ אז $x \in RE$ או $x \in co-RE$

co-RE כי אולי נבדוק אם נחלק אותן והוא RE

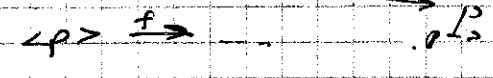
אם $L \in RE$ אז $L \in co-RE$ או $L \in RE$



הוא $M_1(c) = \text{checker}(p, E, c)$
 $M_2(c) = F$

אם $A \subseteq B$ אז $HALT \leq is-even?$

הפונקציה f מקבלת p ומייצגת את p



אם $(p) \in A$

$A \subseteq B$

$A \in RE \iff B \in RE$

$x \rightarrow f(x)$ $p(f(x))$ הפונקציה מקבלת את הפלט B

אם $L_1 \in RE$ אז הפלט של L_1 הוא L_2

הפונקציה מקבלת את הפלט B, והוא מקבל את $B_1(B) = T$

$L_2 - L_1$ הוא יוצא של B, אז L_2 הוא כן, כי B הוא הפלט

L_2 הוא הפלט של L_1

$$L(B_1) = \{x \mid B_1(x) = T\} \quad \text{c-RE} \quad \textcircled{5}$$

המשפטים הנ"ל אינם ניתנים לביצוע
 וזו הסיבה לכך שיש להגביל את המודל.

$\text{halt}_\epsilon \leq A$ מה זה אומר? רצוננו?

המשפטים הנ"ל אינם ניתנים לביצוע

$$\langle p \rangle \xrightarrow{f} \langle B_1, B_2 \rangle$$

$$B_1(x) = \text{checker}(P, \epsilon, x) \rightarrow \begin{array}{l} \text{כאשר } x \text{ הוא} \\ \text{הקלט } F \text{ - הכתוב} \end{array}$$

$$B_2(x) = T \quad \begin{array}{l} \text{אם התירוק} \\ \text{במשך הזמן } A \end{array}$$

⑥ p הוא קודם כולל של M ו- ϵ הוא קודם כולל של M .
 אם יש קודם כולל של M אז יש קודם כולל של M .

⑦ R הוא קודם כולל של M ו- ϵ הוא קודם כולל של M .

$$\text{halt} \leq_m L$$

מה זה אומר?

$$\langle p \rangle \xrightarrow{f} B$$

$$B(n) = p(n); \quad n; \quad \begin{array}{l} \text{כאשר } n \text{ הוא} \\ \text{הקלט } B \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{כאשר } p \\ \text{הוא } B \end{array}$$

אם יש קודם כולל של B אז יש קודם כולל של B .

האם $\text{halt} \leq_m L$?

$$A \leq_m L \quad \text{כאשר } L$$

$$B \leq_m L \quad \text{כאשר } L$$

⑧ L הוא קודם כולל של M ו- ϵ הוא קודם כולל של M .

מה זה אומר? רצוננו? R הוא קודם כולל של M ו- ϵ הוא קודם כולל של M .

8 שאלות חזרה לבוחן

(לקוחות מבחנים וממבחנים קודמים)

1. אם $L_1, L_2 \in R.E.$ או $L_1 \cup L_2 \in R.E.$
- א. נכון, כי השפות ה- R.E. סגורות לאיחוד. *RE סגורה לאיחוד*
- ב. נכון, כי ניתן להרץ את שתי התוכניות שמקבלות את L_1 ו- L_2 "במקביל", וכך לקבל את האיחוד. *ל*
- ג. לא נכון, למשל: $L_1 = HALT, L_2 = (L_1)^c$ *RE*
- ד. לא נכון, למשל: $L_1 = HALT, L_2 = (L_1)^c$ *RE*

2. להלן בעיית הכרעה. עליך לקבוע לאיזה מחלקה היא שייכת:
 קלט: שתי תוכניות Baby M_1 ו- M_2 , שמוכסז ששתיהן עוצרות על כל קלט.
 שאלה: האם M_1 ו- M_2 שקולות סמנטית?

- א. R, אך לא טריביאלית.
- ב. RE, אך לא ב-R.
- ג. co-RE, אך לא ב-R.
- ד. אף אחת מהג'ל.

3. נאמר כי תכנית f היא "רדוקציה חצי רקורסיבית" משפה A לשפה B, אם היא מקיימת את התנאים הבאים:

1. אם x שייך ל A, $f(x)$ שייך ל B.
2. אם x לא שייך ל A, $f(x)$ לא שייך ל B, או שחישובה של f על x אינו מסתיים אף פעם.

$$A := B(f(x))$$

נניח כי קיימת "רדוקציה חצי רקורסיבית" משפה A לשפה B.
 מה מהבאים נכון בהכרח:

A

- א. אם B שייכת ל R, גם A שייכת ל R.
- ב. אם A אינה שייכת ל RE, גם B אינה שייכת ל RE.
- ג. תשובות א' וב' בהכרח נכונות.
- ד. תשובות א' וב' אינן נכונות בהכרח.

$$A \in RE \Leftrightarrow B \in RE$$

4. נתונה תוכנית baby B_1 אשר עוצרת לכל קלט. נגדיר את השפות הבאות:

$$L_1 = \{ B \mid B \text{ is a Baby program and } B \in L(B_1) \}$$

$$L_2 = \{ B \mid B \text{ is a Baby program and } B_1 \in L(B) \}$$

$B_1(B_1) = \tau$
 $B_1(B_2) = \tau$

- א. L_1 ו- L_2 כריעות (ב-R).
- ב. L_1 ו- L_2 כריעות למחצה (ב- R.E.).
- ג. L_1 כריעה ו- L_2 כריעה למחצה.
- ד. L_1 כריעה למחצה ו- L_2 כריעה.

השאלה היא על
 תכונות של
 מספרים טבעיים
 או מספרים שלמים
 או מספרים רציונליים
 או מספרים ממשיים
 או מספרים מרוכבים

$B_1 = 1$ $B_2 = 2$ $B_1(x) = 2$

5. קלט: שתי תוכניות B_1 ו- B_2 .
 שאלה: האם $L(B_1) \cap L(B_2) = \emptyset$?

- א. R
- ב. R.E, אך לא ב-R.
- ג. לא ב-R.E, אך הבעיה המשלימה ב-R.E.
- ד. אף אחד מהנ"ל.

19. יהי $|B|$ אורך תוכנית B Baby.
 להלן בעיית הכרעה:

קלט: תוכנית B בשפת Baby, כך ש $|B| < 1000$.
 שאלה: האם $L(B)$ היא שפה כריעה?

קבעו לאיזה מחלקה שייכת הבעיה הנ"ל:

- א. R
- ב. $RE \setminus R$
- ג. $coRE \setminus R$
- ד. אף לא אחת מהנ"ל.

20. להלן בעיית הכרעה. עליכם לקבוע לאיזו מן המחלקות הבאות היא שייכת:
 קלט: תוכנית Baby מספרית: B (קלט מספר טבעי, ופלט - כאשר יש - מספר טבעי).
 שאלה: האם B היא על הטבעיים (ז"א לכל מספר טבעי y קיים קלט x כך ש $B(x)=y$).

- א. R
- ב. RE, אך לא ב-R.
- ג. co-RE, אך לא ב-R.
- ד. אף אחד מהנ"ל.

21. להלן בעיית הכרעה. עליכם לקבוע לאיזו מן המחלקות הבאות היא שייכת:
 קלט: תוכנית מספרית B: Baby (קלט מספר טבעי, ופלט - כאשר יש - מספר טבעי).
 שאלה: האם B היא חד-חד-ערכית (ז"א אם B עוצרת על x ו- $B(x)=B(y)$ אזי $x=y$).

- א. R
- ב. RE, אך לא ב-R.
- ג. co-RE, אך לא ב-R.
- ד. אף אחד מהנ"ל.