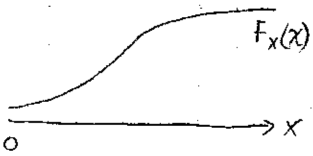
תזכורת:



בהתפלגות רציפה הסכוי ש $X \le x$ יסומן כך $P(X \le x) = F_X(x)$

הפונקציה גזירה והנגזרת שלה היא פונקצית הצפיפות

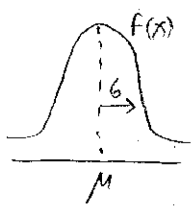
$$\frac{\partial F_x}{\partial x} = f_X(x)$$

כדי לחשב את התוחלת של משתנה מקרי רציף אנו מבצעים אינטגרל של פונקצית הצפיפות $E(X) = \int_{\mathbb{R}} x \cdot f(x) dx$. בפועל אנו מבצעים אינטגרציה רק על התומך (התחום בו הפונקציה אינה 0).

כמו כן, קיימת השונות $Var(X) = \int (x - E(x))^2 f(x) dx = E(X^2) - (E(X))^2$

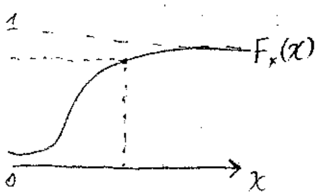
לעתים מדדים אלו אינם מתכנסים - לא נתייחס לכך בקורס.

התפלגות נורמלית



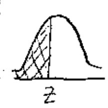
$$f(x) = \underbrace{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}_{\text{נותן לפונקציה את הצורה}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}}_{\text{קבוע נרמול}}$$

(*) לפונקציה זו אין פונקציה קדומה אלמנטרית, לכן אנו עובדים עם טבלאות (בבית ספר מתמטי).



הפונקציה המצטברת הנורמלית נראית בערך כמו הגרף משמאל. היא רציפה, חד חד ערכית ועל.

נשים לב שבהתפלגות רציפה, אינטגרל מוגדר טוב יותר. אנו בודקים שאלות מהו ה-x שהשטח מתחת לגרף בקטע $(-\infty, x)$ הוא כאחוז הנדרש מכלל השטח שמתחת לגרף.



המשפחה הנורמלית סגורה לטרנספורמציות לינאריות. כלומר, אם נוסיף קבוע או נכפיל בקבוע, ההתפלגות תישאר כבעבר.

כלומר, נניח $X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$. נסתכל על ההתפלגות של הטרנספורמציה הלינארית $(a+bx)$. לאחר הטרנספורמציה מתקיים $a+bx \sim N(a+b\mu_x, b^2\sigma_x^2)$.

תכונה נוספת של התפלגות נורמלית היא סגירות לחיבור של 2 התפלגויות נורמליות. במקרה זה מתקיים:
(בתנאי שאין תלות בין 2 המ"מ)

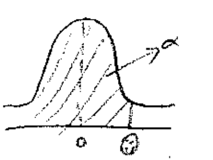
$$\left.\begin{array}{l} X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2) \\ Y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2) \end{array}\right\} (X+Y) \sim N(\mu_x + \mu_y, \sigma_x^2 + \sigma_y^2)$$

משפט הגבול המרכזי clt

סכום של משתנים מקריים בלתי תלויים (בעלי מומנטים ראשונים סופיים) נוטה להתפלגות נורמלית.

התפלגות נורמלית סטנדרטית - פעמים שהממוצע שלו 0 והשונות שלו היא 1, כלומר $X \sim (0,1) \equiv Z$

$P(Z \le ☺) \equiv \Phi(☺)$



$Z_\alpha = ☺$ (לדוגמא, מהו הגובה ש-75% קטנים ממנו).

$$\frac{\partial \Phi}{\partial ☺} = \Phi(☺)$$

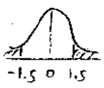
<u>תרגילים</u>

(מצא בעזרת הטבלה:)

$\Phi(2.20) = 0.9861$

$\Phi(0.68) = 0.7517$

(מה שהטבלה אומרת לנו היא "מהו α" כאשר $0.68 = \odot$)



נשים לב:

$\Phi(-1.5) = 1 - \Phi(1.5) = 1 - 0.9332 = \dots$

אם נרצה לחשב את המסה בין 2 ל-3, נחשב את המסה עד 3 ונחסיר את המסה עד 2.

$P(2 \le Z \le 3) = \Phi(3) - \Phi(2)$

$Z_{0.9} = 1.282$ (נמצא בטבלה למטה)

$Z_{0.1} = -1.282$

<u>שאלה 2 מהתרגיל</u>

$X \sim N(10, 100)$ מה הסיכוי שהמשתנה יהיה שלילי, כלומר מה המסה עד 0?

$\sigma = 10$

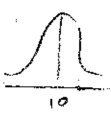
$$P(X \le 0) = P(X - 10 \le 0 - 10) = P\Big(\frac{X - \overset{\mu}{10}}{\underset{\sigma}{10}} \le \frac{0-10}{10}\Big) = \Phi(-1) = 1 - \Phi(1) = 0.1586$$

בפעולות הללו (הסרת התוחלת
וחלוק בשונות) הופך את התפלגות המשתנה
של הביטוי להיות סוג התפלגות, כלומר
הביטוי מתפלג נורמלית וסטנדרטית, ולכן נשתמש בטבלה.

מה האחוזון ה-15.86 של התפלגות זו? (מהו הערך שעד אליו נצבר 15.86% מהכמות?)

$P(X \le x_\alpha) = \alpha$

כיוון שחישבנו כבר שעד 0 נצבר 0.1586 מהכמות, התשובה לכך היא 0.



מהו האחוזון ה-50% של ההתפלגות? (מובן בסימטריה ש-50% מהמסה נצברת
ב-10 (התוחלת).)

מתי נצברו 0% מהמסה? $-\infty$, מתי נצברו 100% מהמסה? $+\infty$.

$$P(X \le x) = 0.1 = P\Big(\underbrace{\frac{X-10}{10}}_{Z} \le \underbrace{\frac{x-10}{10}}_{Z_{0.1}}\Big) \Rightarrow \frac{x-10}{10} = Z_{0.1} \Leftrightarrow x = 10 + 10\underbrace{Z_{0.1}}_{-1.282} = -2.82$$

בשאלה של הדוגמה לעשות רק את סעיפים a ו-b.