

.1

$$(HE) \frac{}{\forall x(A \rightarrow B) \Rightarrow \forall x(A \rightarrow B)}$$

$$(\rightarrow E) \frac{}{\forall x(A \rightarrow B) \Rightarrow A \rightarrow B} \quad A \Rightarrow A$$

$$(EI) \frac{}{A, \forall x(A \rightarrow B) \Rightarrow B}$$

$$(\exists E) \frac{}{A, \forall x(A \rightarrow B) \Rightarrow \exists x.B} \quad \exists x.A \Rightarrow \exists x.A$$

$$(\rightarrow I) \frac{}{\exists x.A, \forall x(A \rightarrow B) \Rightarrow \exists x.B}$$

$$(\rightarrow I) \frac{}{\forall x(A \rightarrow B) \Rightarrow (\exists x.A \rightarrow \exists x.B)}$$

$$\Rightarrow \forall x(A \rightarrow B) \rightarrow (\exists x.A \rightarrow \exists x.B)$$

$$\vdash_{NDFOL} \forall x(A \rightarrow B) \rightarrow (\exists x.A \rightarrow \exists x.B)$$

אנו מוכיחים כי מגדירים

$$(HE) \frac{}{\forall x.(A \rightarrow B) \Rightarrow \forall x.(A \rightarrow B)}$$

$$(\rightarrow E) \frac{}{\forall x.(A \rightarrow B) \Rightarrow (A \rightarrow B)} \quad A \Rightarrow A$$

$$(\forall I) \frac{A}{\forall x.(A \rightarrow B), \forall x.A \Rightarrow B}$$

$$(\rightarrow I) \frac{\forall x.(A \rightarrow B), \forall x.A \Rightarrow B}{\forall x.(A \rightarrow B), \forall x.A \Rightarrow \forall x.B}$$

$$(\rightarrow I) \frac{\forall x.(A \rightarrow B), \forall x.A \Rightarrow \forall x.B}{\forall x.(A \rightarrow B) \Rightarrow (\forall x.A \rightarrow \forall x.B)}$$

$$\Rightarrow \forall x.(A \rightarrow B) \rightarrow (\forall x.A \rightarrow \forall x.B)$$

$$\vdash_{NDFOL} \forall x(A \rightarrow B) \rightarrow (\forall x.A \rightarrow \forall x.B)$$

אנו מוכיחים כי מגדירים

 $x \in Fv(\exists A)$ ונאמר  $A \Rightarrow \forall x A$  גנלאסוס כוונתית,  $\forall x A$ ,  $A \Rightarrow A$ - נאמר  $\forall x A = A$  $\forall x A \in A$  $\forall x A = A$ 

$$(E) \frac{A_i \in A}{A_i \Rightarrow A}$$

$$(E) \frac{A \in A}{A \Rightarrow A}$$

$$(EI) \frac{A \in A}{\exists x.A \in A}$$

$$(I) \frac{\exists x.A \in A}{\exists x.A = \exists x.A}$$

$$(E) \frac{\exists x.A = \exists x.A}{\exists x.A \Rightarrow \exists x.A}$$

$$(E) \frac{\exists x.A \Rightarrow \exists x.A}{A \Rightarrow \exists x.A}$$

$$(I) \frac{A \Rightarrow \exists x.A}{\forall x.A \rightarrow \exists x.A}$$

$$\vdash_{NDFOL} \exists x.A \rightarrow \forall x.\exists x.A$$

אנו מוכיחים כי מגדירים

גמיה  $\forall x.(\exists E) \circ \text{ווגזרנו } A \Rightarrow \forall x.A$

הוכחה כ' נ- 2  
 $\Gamma \Rightarrow A \{x\} \quad (I)$   
 $\Gamma \text{ דדרת רגולאר } \Leftrightarrow \text{ רגולאר } (\text{כ-כגיא-גיהא רגולאר רגולאר})$

$\Gamma \vdash A \{x\} \quad (I \rightarrow)$   
 $\Gamma \vdash A \{x\} \quad (E)$   
 $\Gamma \vdash A \{x\} \quad (I \leftarrow)$   
 $\Gamma \vdash A \{x\} \quad (I)$

$\Gamma \vdash A \{x\} \quad (I \rightarrow)$   
 $\Gamma \vdash A \{x\} \quad (E)$   
 $\Gamma \vdash A \{x\} \quad (I \leftarrow)$   
 $\Gamma \vdash A \{x\} \quad (I)$

הוכחה כרעה

ט"ז

$\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \Rightarrow C \quad (ט'ז א-נ- 2)$   
 $\Gamma_1 \vdash A \{x\} \quad (ט'ז א-נ- 2)$   
 $\Gamma_2 \vdash A \{x\} \quad (ט'ז א-נ- 2)$

$\exists x A \quad \text{כך } \forall y \text{ט'ז}$

$\Gamma_1 \Rightarrow A \{x\} \quad (I \rightarrow)$   
 $\Gamma_1 \vdash A \{x\} \quad (E)$   
 $\Gamma_1 \vdash A \{x\} \quad (I \leftarrow)$   
 $\Gamma_1 \vdash A \{x\} \quad (I)$

$\Gamma_2 \vdash A \{x\} \quad (I \rightarrow)$   
 $\Gamma_2 \vdash A \{x\} \quad (E)$   
 $\Gamma_2 \vdash A \{x\} \quad (I \leftarrow)$   
 $\Gamma_2 \vdash A \{x\} \quad (I)$

$\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \Rightarrow C$

הוכיח:  
 $\exists x A \quad \text{כך } \forall y \text{ט'ז}$   
 $\Gamma_1 \vdash A \{x\} \quad (ט'ז א-נ- 2)$   
 $\Gamma_2 \vdash A \{x\} \quad (ט'ז א-נ- 2)$   
 $\Gamma_1 \vdash A \{x\} \quad (I \rightarrow)$   
 $\Gamma_2 \vdash A \{x\} \quad (I \rightarrow)$

ט'ז  $\Gamma_2, A \{x\} \Rightarrow C - N$   $\Gamma_2 \vdash C \Rightarrow \forall x A \quad \text{ט'ז כויה כ- } \Gamma_1 \Rightarrow A \{x\}$

$$\varphi_1 \equiv \forall x_1 \forall x_3 (\rho(x_1, x_2) \rightarrow q(x_3)) \quad FV[\varphi_1] = \{x_2\} \quad \underline{k} \quad .3$$

↑  
18.12  
18.12  
18.12

$$\varphi_2 \equiv \forall x_2 (\rho(f(x_2)) \rightarrow \forall x_3 q(x_1, x_2, x_3)) \quad FV[\varphi_2] = \{x_1\} \quad \underline{o}$$

↑  
18.12  
18.12  
18.12

$$\varphi_3 \equiv (\exists P(x_2) \wedge \forall x_5 P(x_5)) \wedge \forall x_2 P(x_2) \quad FV[\varphi_3] = \{x_2\} \quad \underline{c}$$

↑  
18.12  
18.12  
18.12

$$\varphi_4 \equiv [\forall x_1 r(x_1, x_3) \wedge \exists x_1 r(x_2, x_3)] \vee [\exists x_1 \forall x_1 (r(x_2, x_5) \rightarrow \exists x_2 r(x_1, x_4))] \quad \underline{3}$$

↑  
18.12  
18.12  
18.12  
18.12  
18.12  
18.12

$$FV[\varphi_4] = \{x_2, x_3, x_5\}$$

$$\psi = \forall x \exists y ((\exists z \forall x R(x, z, w)) \wedge (\exists w. P(w, x, z))) \quad .4$$

ל. הינה  $\exists z \forall x R(x, z, w)$  מושג ב"ה" ו $\forall w. P(w, x, z)$  מושג ב"ב"

ב. מוגדר  $\exists r \exists y \forall x P(x, y, r)$

$$\psi \{ f(z, w), \frac{x}{x}, \frac{y}{y}, \frac{z}{z}, \frac{r}{w} \} =$$

$$= \forall x \exists y ((\exists z \forall x R(x, z, f(w, s))) \wedge (\exists w. P(w, x, f(z, z))))$$

ל. הינה  $\exists z \forall x R(x, z, f(s, w))$  מושג ב"א" ו $\exists w. P(w, x, f(z, z))$  מושג ב"ב"

$$\psi_{f..} = \forall x \exists y ((\exists z \forall x R(x, z, f(s, w))) \wedge (\exists r P(r, x, f(s, w))))$$

## לוגיקה למדעי המחשב - תרגיל מס' 8

1. הוכיחו בעזרת דזוקציה טבעית :

$$\begin{aligned}
 & \Rightarrow \forall x(A \rightarrow B) \rightarrow (\exists x A \rightarrow \exists x B) \quad \text{(א)} \\
 & \Rightarrow \forall x(A \rightarrow B) \rightarrow (\forall x A \rightarrow \forall x B) \quad \text{(ב)} \\
 & \Rightarrow \neg \exists x A \rightarrow \forall x \neg A \quad \text{(ג)} \\
 & \Rightarrow \forall x \neg A \rightarrow \forall x \neg A \quad \text{(ד)}
 \end{aligned}$$

לא יהיה  $\exists x A$  קיצור של  $\neg \forall x \neg A$ . הוכחה שניי הכללים של  $\exists$  ב-*NDFOL* נזרים בעזרת הכללים האחרים.

לא ניתן לגבי כל אחד מMOVי המשתנים האם הוא חופשי או קשור:

$$\begin{aligned}
 & \forall x_1 \forall x_3 (p(x_1, x_2) \rightarrow q(x_3)) \quad \text{(א)} \\
 & \forall x_2 (p(f(x_2)) \rightarrow \forall x_3 q(x_1, x_2, x_3)) \quad \text{(ב)} \\
 & (\neg p(x_2) \wedge \forall x_5 p(x_2)) \wedge \forall x_2 p(x_2) \quad \text{(ג)} \\
 & [\forall x_1 (r(x_1, x_3) \wedge \exists x_1 r(x_2, x_3))] \vee [\exists x_1 \forall x_1 (r(x_2, x_5) \rightarrow \exists x_4 r(x_1, x_4))] \quad \text{(ד)}
 \end{aligned}$$

4. נתונה הנוסחא הבאה:  $\Psi = \forall x \exists y (\exists z \forall x R(x, z, w) \wedge \exists w P(w, x, z))$ .

קבעו לגבי כל אחת מההצבות הבאות האם היא מותרת.

בצע שינוי שמות משתנים קשורים היכן שצורך, וכתבו את תוצאת ההצבה.

! שימוש לב Ci הרישום  $\left\{ \frac{t_1}{x}, \frac{t_2}{y}, \frac{t_3}{z} \right\}$  מתייחס להצבה סימולטנית ולא בואה אחר זה.

$$\begin{aligned}
 & \Psi \left\{ \frac{f(x,y)}{x}, \frac{x}{y}, \frac{f(y,y)}{z}, \frac{w}{w} \right\} \quad \text{(א)} \\
 & \Psi \left\{ \frac{f(z,w)}{x}, \frac{y}{y}, \frac{f(z,z)}{z}, \frac{f(w,s)}{w} \right\} \quad \text{(ב)} \\
 & \Psi \left\{ \frac{f(s,w)}{x}, \frac{f(s,w)}{y}, \frac{f(s,w)}{z}, \frac{f(s,w)}{w} \right\} \quad \text{(ג)}
 \end{aligned}$$