# אנליזה נומרית - שיעור 3

<u>חזרה על שיעור קודם</u>

סדר התכנסות p:

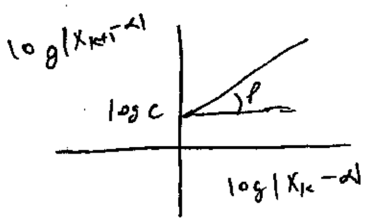
$f(x)=0$

$$\frac{|x_{k+1}-\alpha|}{|x_k-\alpha|^p}\le c$$

נניח כי בקירוב:

$$|x_{k+1}-\alpha|\approx c\cdot|x_k-\alpha|^p$$

$$\log|x_{k+1}-\alpha|\approx\log c+p\cdot\log|x_k-\alpha|$$




תזכורת

שיטה גאומטרית

$$f(x)=\overset{0}{f(\alpha)}+(x-\alpha)\cdot f'(\xi)$$

$$\alpha=x-\frac{f(x)}{f'(\xi)}$$

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{q_k}$$

בעלות סדר התכנסות...

Cord - סדר 1.

Regula-falsi - מתכנס תמיד, לא ידוע באיזה סדר.

Secant - סדר $\frac{1+\sqrt5}{2}$

ניוטון - סדר 2.

<u>התכנסות לנקודת שבת</u> Fixed point iterations

<u>משפט:</u> יהי קטע $[a,b]$ ונקודה $x_0\in[a,b]$.

<u>נניח ש:</u>

$$\underline{x_{k+1}=\phi(x_k)}$$

1) $\phi:[a,b]\longrightarrow[a,b]$

2) $\phi\in C^1[a,b]$

3) $\forall x\in[a,b]\,,\ |\phi'(x)|<M\quad\exists M<1$ הנגזרת חסומה ע"י 1 בקטע.

זה אומר: 1) ש-$\phi$ יש נקודת שבת יחידה $\alpha=\phi(\alpha)$.

2) הסדרה $\{x_k\}$ מתכנסת ל-$\alpha$ לכל $x_0$. לא משנה איפה $x_0$ נמצא הסדרה תתכנס לנק' השבת.

3)
$$\lim_{k\to\infty}\frac{x_{k+1}-\alpha}{x_k-\alpha}=\phi'(\alpha)$$

<u>הוכחה:</u>

עבור קיום

1) מ-1 ו-2 נובע כי קיימת לפחות נק' שבת אחת ב-$[a,b]$.

מהתכונה הראשונה נובע כי: $a\le\min_{x\in[a,b]}\phi(x)\le\max_{x\in[a,b]}\phi(x)\le b$ כי זה המינימום של הטווח.

נגדיר $F=\phi(x)-x$

$$F(a)=\phi(a)-a\ge0\ ,\quad F(b)=\phi(b)-b\le0$$

לפי ב $F \in C^1$ (הפונקציה רציפה) $\Leftarrow$ $F(\alpha)=0$ ולכן קיימת נקודה לפי משפט ערך הביניים.

הוכחנו כי קיימת נקודה, כעת נוכיח כי היא יחידה.

נניח יחידות: נניח בה"כ $\phi(\alpha_1)=\alpha_1$ , $\phi(\alpha_2)=\alpha_2$

$\xi \in (\alpha_1, \alpha_2)$

$$|\alpha_1-\alpha_2| = |\phi(\alpha_1)-\phi(\alpha_2)| \underset{\text{זה לגרנז'}}{=} |\phi'(\xi)\cdot(\alpha_2-\alpha_1)| < M|\alpha_2-\alpha_1|$$

$\Leftarrow$ $|\alpha_1-\alpha_2| < M|\alpha_2-\alpha_1|$ $\Leftarrow$ $1<M$ וזה בסתירה לכך ש- $M<1$

לכן $\alpha_1=\alpha_2$

נוכיח את ב':

ב'. סדרה מתכנסת ל-$\alpha$

$$|x_{k+1}-\alpha| = |\phi(x_k)-\phi(\alpha)| = |\phi'(\xi)\cdot(x_k-\alpha)| \le M\cdot|x_k-\alpha|$$

$x_{k+1}=\phi(x_k)$

$$\Rightarrow |x_{k+1}-\alpha| \le M\cdot|x_k-\alpha| \le M^{k+1}\cdot|x_0-\alpha| \longrightarrow 0$$

כי $M$ קטן ממש מ-1.

אם רוצים ש: $|x_{k+1}-\alpha|<\varepsilon$ לחסום את ההתכנסות, כלומר מתי ה-$(k+1)$

נדרוש ש: $M^{k+1}|b-a|<\varepsilon$ (כאשר זה המרחק הכי גדול, עם $a, b$.)

$$M^{k+1} < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

$$(k+1)\cdot\log M < \log\frac{\varepsilon}{b-a}$$

$$(k+1) > \frac{\log\frac{\varepsilon}{b-a}}{\log M}$$

לוג $M$ מס' שלילי (כי $M<1$) ולכן בחלוקה בו כיוון אי-השוויון משתנה

ג.

$$\lim_{k\to\infty}\frac{x_{k+1}-\alpha}{x_k-\alpha} = \lim_{k\to\infty}\frac{\phi'(\xi_k)\cdot(x_k-\alpha)}{(x_k-\alpha)} = \lim_{k\to\infty}\phi'(\xi_k) = \phi'(\alpha)$$

$\xi_k \in (x_k, \alpha)$ אבל $x_k \to \alpha$ ולכן: $\lim\phi'(\xi_k)=\phi'(\alpha)$

הערות:

1. אם $|\phi'(\alpha)|>1$ אין התכנסות כי $|x_{k+1}-\alpha| > |x_k-\alpha|$ וכו
$x_{k+1}$ מתרחק מ-$\alpha$.
זה לא מתכנס. נובע כי: $|x_{k+1}-\alpha| = |\phi'(\xi)|\cdot|x_k-\alpha|$

2. אם $\phi'(\alpha)=1$:

- אם $\phi = x + x^3$ $(\alpha=0)$ אין התכנסות.
- אם $\phi = x - x^3$ יש התכנסות.

$x_0=\frac{1}{2} \xrightarrow{\text{לאחר 2000 איטרציות}} x_{2000} = 0.0157021\ldots$

$x_{2001} = 0.0157782\ldots$

$\frac{x_{m+1}-x_m}{x_m}$ זה מתכנס, אבל מאוד לאט.

**משפט:** אם $\phi \in C^{p+1}$ $(p \geq 1)$ בסביבת $\alpha$ ו-

$$\phi^{(j)}(\alpha)=0 \qquad j=1\dots p$$

$$\phi^{(p+1)}(\alpha)\neq 0$$

אז

$$\lim_{k\to\infty}\frac{x_{k+1}-\alpha}{(x_k-\alpha)^{p+1}}=\frac{\phi^{(p+1)}(\alpha)}{(p+1)!}$$

הוכחה:

$$|x_{k+1}-\alpha| = \phi(x_k)-\phi(\alpha) = \underbrace{\cancel{\phi(\alpha)} + \sum_{j=1}^{p}\frac{\phi^{(j)}(\alpha)}{j!}(x_k-\alpha)^j}_{\phi(x_k)} + \frac{\phi^{(p+1)}(\xi)}{(p+1)!}(x_k-\alpha)^{p+1} - \cancel{\phi(\alpha)}$$

שווה ל ואז ל-0 כי $\phi^{(j)}_{(\alpha)}=0$

$$|x_{k+1}-\alpha| = \frac{\phi^{(p+1)}(\xi)}{(p+1)!}\cdot(x_k-\alpha)^{p+1}$$

$$\Rightarrow \lim \frac{x_{k+1}-\alpha}{(x_k-\alpha)^{p+1}}=\frac{\phi^{(p+1)}(\alpha)}{(p+1)!}$$

מרציפות $\phi^{(p+1)}(\xi)=\phi^{(p+1)}(\alpha)$

**דוגמא:** שיטת Cord

הוא רצה להראות את התנאי השני $|\phi'(x)|<1$

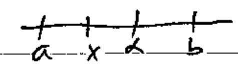
$$x_{k+1}=x_k-\frac{b-a}{f(b)-f(a)}\cdot f(x_k)\equiv \phi_{cord}(x_k)$$

$$|\phi'_{cord}| = \left|1-\frac{b-a}{f(b)-f(a)}\cdot f'(x_k)\right| \overset{?}{<} 1$$

$$-1<\frac{b-a}{f(b)-f(a)}\cdot f'(x)-1<1$$

$$0<\frac{b-a}{f(b)-f(a)}\cdot f'(x)<2$$

לכן אם נבחר $a,b$ כך ש- $0<\frac{b-a}{f(b)-f(a)}\cdot f'(x)<2$

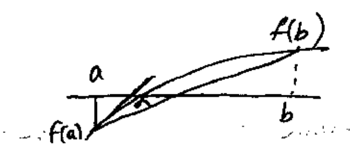



אז ב- התנאים מתקיימים. מאחר ו- $\phi'(\alpha)\neq 0$ אז התכנסות מסדר 1.

נראה מתי

$$\phi'(\alpha)=1-\frac{b-a}{f(b)-f(a)}\cdot f'(\alpha)\overset{?}{=}0$$

במצב לא. הייתי צריכה קומבינציה מאוד ספציפית.




התכנסות מסדר שני ← כשהקשת היא מתאימה

**דוגמא:** שיטת ניוטון

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}=\phi(x_k)$$

$$\phi_N(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)} \qquad \phi(\alpha)=\alpha$$

$f(\alpha)=0$

גזירת מכפלה של f

$$\phi'_N(\alpha)=1-\frac{f'(\alpha)\cdot f'(\alpha)-\overset{=0}{\cancel{f(\alpha)}}\cdot f''(\alpha)}{(f'(\alpha))^2}$$

$$\phi'_N(\alpha)=1-\frac{\cancel{f'(\alpha)\cdot f'(\alpha)}}{\cancel{(f'(\alpha))^2}}=1-1=0$$

$$\phi''(\alpha) = \left[1 - \left[\frac{f'(\alpha)^2 - f(\alpha)\cdot f''(\alpha)}{(f'(\alpha))^2}\right]\right]' = \left[\frac{f(\alpha)\cdot f''(\alpha)}{[f'(\alpha)]^2}\right]' =$$

$$= \frac{(f'\cdot f'' + \cancel{f\cdot f'''})\cdot (f')^2 - \cancel{2\cdot f' f''\cdot (f\cdot f'')}}{(f')^4} = \frac{(f')^3 f''}{(f')^4} = \underline{\underline{\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}}}$$

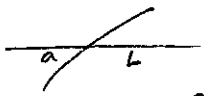
משמע זה לפי x, ואז בסוף מציבים α, פה הוא קיצר.

כי בד"כ לא אפס ⇐ ולכן זה מסדר שני.

זהו נושא של נקודת השבת.

<u>כאשר נעבור ליותר ממימד אחד</u>

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$




$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $\qquad f(\underline{x}) = 0$

הכללה של מה שעשינו מקודם

$f(\underline{x}): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ לפעמים בעקיפין!

פה בד"כ מדובר על עקומה.

בד"כ לא נתייחס לבעיה זו.

<u>סימונים</u>

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underline{x} \in \mathbb{R}^n$$

הוקטור $x^0$:

$$\Delta \underline{x} = \underline{x} - \underline{x}^0 = \begin{pmatrix} x_1 - x_1^{(0)} \\ \vdots \\ x_n - x_n^{(0)} \end{pmatrix} \qquad \underline{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{pmatrix}$$

$$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad f(x_1 \dots x_n) = f(\underline{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

<u>בהגדרה</u>: הפונקציה $f$ תקרא דיפרנציאבילית בנק' $\underline{x}^{(0)}$ אם קיימים $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ כך ש:

$$\lim_{\|\Delta x\| \to 0} \frac{1}{\|\Delta x\|}\Big[\overbrace{f(\underline{x}) - f(\underline{x}^0)}^{\Delta x} - \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot \Delta x_j\Big] = 0$$

$$\|\underline{x}\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2} \qquad f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$f(x_1 \dots x_n) = f(\underline{x}): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

הפונקציה דיפרנציאבילית אם קיים הביטוי שמוצג כאן.

המשמעות: אם $f$ ניתן לקרב ע"י קומבינציה לינארית

הגדרה שקולה לזה היא:

$$f(\underline{x}) = \underbrace{f(\underline{x}^{(0)})}_{\text{ערך בנקודה}} + \underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_j \Delta x_j}_{\text{קומבינציה לינארית}} + \phi(\Delta \underline{x})$$

כאשר: $\lim_{\|\Delta x\| \to 0} \frac{\phi(\Delta x)}{\|\Delta x\|} = 0$ (*)

כלומר $\phi = o(\|\Delta x\|)$.

מציאות ה- $a_j$:

$$\Delta x = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \Delta x_j \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \Delta x_j \cdot e_j$$

וקטור היחידה ה-j

$$f(x^{(0)} + \Delta x) = f(x^{(0)}) + a_j \cdot \Delta x_j + \phi(\Delta x_j)$$

נציב ונקבל

זה מה שנשאר מהקומבינציה $\Sigma a_j \Delta x_j$.

$$f(x^{(0)} + \Delta x) - f(x^{(0)}) = a_j \cdot \Delta x_j + \phi(\Delta x_j)$$

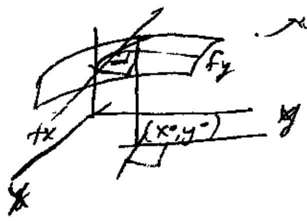
$$\frac{\partial f}{\partial} \quad \lim_{\Delta x_j \to 0} \frac{f(x_1^{(0)},\dots,x_j^{(0)}+\Delta x_j,\dots,x_n^{(0)}) - f(x_1^{(0)}\dots x_n^{(0)})}{\Delta x_j} = \lim_{\Delta x_j \to 0} \frac{a_j \cdot \cancel{\Delta x_j}}{\cancel{\Delta x_j}} + \frac{\varphi(\Delta}{\Delta x_j} = a_j$$

(מבחן ⋆)

$$(\star) \quad \Rightarrow f(\underline{x}) = f(\underline{x}^{(0)}) + \underbrace{\sum_{j=1}^{n} f_{x_j}(\underline{x}^{(0)}) \cdot \Delta x_j}_{\langle \nabla f, \Delta x \rangle} + o(\|\Delta \underline{x}\|)$$

מכפלה פנימית.

$$\nabla f \equiv \begin{pmatrix} f_{x_1} \\ \vdots \\ f_{x_n} \end{pmatrix}$$

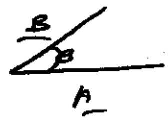



$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

למעשה, אנחנו רוצים שהפונקציה מתנהגת כמו המישור. מצליחים להראות שהיא מתנהגת לה כמו סדר ראשון.

הפונקציה ליד הנקודה מתנהגת כמו המישור.

$$(\underline{A}, \underline{B}) = \|A\| \cdot \|B\| \cdot \cos\theta$$




$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}} = \lim \frac{f(\underline{x}^{(0)} + \underline{v} \cdot \Delta t) - f(\underline{x}^{(0)})}{\Delta t} = \qquad \|\underline{v}\| = 1$$

$$\Rightarrow \frac{(\nabla f, \underline{v}\cancel{\Delta t})}{\cancel{\Delta t}} + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} ^{=o(1)} =$$

נצמצם את הפקטור.

(⋆) נעבור לגבול וזה שווה במונה.

$$f_{\underline{v}} = \langle \nabla f, \underline{v} )$$

(I) $\underline{v} = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$ בחר: $\nearrow \nabla f$

ולכן $\underline{v}$ ו-$\nabla f$ הם באותו כיוון, $\theta = 0$.

מינ':

$$f_{\underline{v}} = \langle \nabla f, \underline{v} ) = \|\nabla f\| \cdot \|\underline{v}\|^{=1} \cdot \cos\theta^{=1}$$

הנגזרת מקבלת ערך מקסימלי. $\cos\theta = 1$.

(II) $\underline{v} = -\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$ $\quad \theta = \pi = 180°$

הכיוון ההפוך

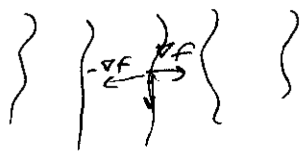
$f_{\underline{v}}$ מקבל ערך מינימלי.

$\cos\theta = (-1)$

(III) $\underline{v} \perp \nabla f \Rightarrow \theta = \pm 90° \Rightarrow f_{\underline{v}} = 0$

הם מאונכים

זה עבור פונקציות $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.




כעת נסתכל על פונקציות $\underline{f}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$.

$$\begin{pmatrix} f_1(\underline{x}) \\ \vdots \\ f_k(\underline{x}) \end{pmatrix}$$

$f$ דיפרנציאבילית

$$\lim_{\|\Delta x\| \to 0} \frac{1}{\|\Delta x\|} \cdot [f(\underline{x}) - f(\underline{x}^0) - M \Delta x]^k = 0$$

מטריצת יעקובי:

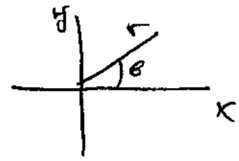
$M: k \times n$

$$M = \begin{pmatrix} \nabla f_1 \\ \nabla f_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{1x_1} & f_{1x_2} & \dots & f_{1x_n} \\ \vdots & & & \\ f_{k\dots} & \dots & \dots & f_{k\dots} \end{pmatrix}$$

**דוגמה:**

$x = r\cdot\cos\theta$

$y = r\cdot\sin\theta$




גזר לפי $r$

$$J = \begin{pmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\cdot\sin\theta \\ \sin\theta & r\cdot\cos\theta \end{pmatrix}$$

גזר לפי $\theta$

$$f_1 = \underbrace{r}_{x_1}\,\cos\underbrace{\theta}_{x_2}$$

**משפט:** $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ הפונקציה $f$ דיפרנציאבילית בסביבת $\underline{x}^{(0)}$ אם
כל הנגזרות $f_{x_j}$ רציפות בסביבת $\underline{x}^{(0)}$.

כל זה אם ורק אם.