אלגוריתמים – פתרון תרגיל 4

1. נתונה רשת זרימה שבה בנוסף לחסמים העליונים $c(e)$ על הקשתות יש גם חסם תחתון $b(e)$ על כל קשת, כלומר הזרימה בקשת e, $f(e)$, צריכה לקיים $b(e) \le f(e) \le c(e)$. מהם השינויים הנדרשים באלגוריתם של Ford-Fulkerson כדי להתאימו למציאת זרימה מקסימלית תחת תנאים אלה, כאשר נתונה זרימה חוקית ברשת?

פתרון:
קיימת כבר זרימה חוקית ברשת. נסמן זרימה זו כ-f. נגדיר את השינוי בהפעלת אלגוריתם Ford-Fulkerson:
בפעם הראשונה נבנה רשת חדשה ע"פ הכלל הבא: עבור הקשתות הרגילות נגדיר $C_{g'}(u,v)=c(u,v)-f(u,v)$. עבור האנטי-קשתות נגדיר $C_{g'}(v,u)=f(u,v)-b(u,v)$. עתה נריץ את אלגוריתם Ford-Fulkerson על הרשת החדש G'. נשים לב שבעת הרצת האלגוריתם, עלינו להשתמש בגרסה הרשמית שלו (זו שמעדכנת את הזרימה באנטי קשתות ביחס לזרימה הנוכחית בהם ולא פשוט ערך נגדי לזרימה של הקשת המקורית). בסוף האלגוריתם נקבל זרימה f'. זו הזרימה המקסימאלית.

הוכחת נכונות:

א. <u>נראה כי f' היא זרימה חוקית</u>:
נתון כי זרימה f המקורית היא זרימה חוקית. מכאן נקבל כי
$f'(u,v) \le f(u,v)+C_{G'}(u,v)=f(u,v)+c(u,v)-f(u,v)=c(u,v)$
$f'(u,v) \ge f(u,v)+C_{G'}(v,u)=f(u,v)+b(u,v)-f(u,v)=b(u,v)$
סה"כ קיבלנו כי $b(u,v) \le f'(u,v) \le c(u,v)$ כנדרש.

ב. <u>f' היא זרימה מקסימאלית</u>:
השינוי שביצענו מתקיים לפני תחילת ריצת האלגוריתם. מטרת השינוי הינה להגביל את המקסימום באנטי קשתות וע"י כך לוודא את הזרמת המינימום הנדרש. תחת הקיבולות החדשות, איך הבדל בריצת Ford-Fulkerson. לכן, ברשת החדשה, אלגוריתם Ford-Fulkerson ימצא את הזרימה המקסימאלית בוודאות.

ניתוח סבוכיות:

א. הגדרת קיבולי הקשתות ברשת החדשה – $O(|E|)$.

ב. הרצת אלגוריתם F-F על הרשת שבנינו (נשים לב שהשינוי באלגוריתם מתבטא ב-$O(1)$ ולא משפיע על זמן הריצה הכללי שלו) – $O(|V||E|^2)$.

סה"כ סיבוכיות זמן ריצת האלגוריתם - $\mathbf{O(|V||E|^2)}$.

מ.ש.ל ▪

2. הוכיחו את משפט מנגר עבור קודקודים: יהי $G=(V,E)$ גרף (מכוון או לא), ו- $s,t \in V$, ונניח שאין בגרף קשת (s,t). אז המספר המקסימלי של מסלולים זרים בקודקודים מ- s ל- t שווה למספר המינימלי של קודקודים שצריך להסיר מ- G כדי לנתק את t מ- s.

הוכחה:
<u>כיוון ראשון</u>: נניח שכדי לנתק את s מ-t יש למחוק לפחות k קודקודים. נניח בשלילה שהמספר המקסימאלי של מסלולים הזרים בקודקודים מ-s ל-t גדול מ-k. כלומר, קיימים לפחות $k+1$ מסלולים כאלו. נסמן את המסלולים $s,u_{i,1},\dots,t$ כך ש-i הוא בין 1 ל-$k+1$ (כולל). המסלולים זרים בקודקודים (ומכאן שגם בקשתות), לכן, כדי לנתק את s מ-t עלינו לנתק בכל מסלול לפחות קודקוד אחד. קיבלנו שהמספר המינימאלי של קודקודים שיש לנתק הוא $k+1$ בסתירה להנחה שמספר הקודקודים המינימאלי הוא k.

<u>כיוון שני</u>: נניח שבגרף קיימים k מסלולים זרים בקודקודים. נסמן את המסלולים $s,u_{i,1},\dots,t$.
נניח בשלילה, שניתן לנתק את s מ-t באמצעות פחות מ-k קודקודים. אך מצב זה אינו אפשרי, כיוון שאם כן, חייב היה להיות קודקוד המשותף ל-2 מסלולים (כי אחרת לא כל המסלולים בין s ל-t היו מתנתקים). זאת בסתירה להנחה שאלו מסלולים זרים בקודקודים.

3. נתונות n משימות ו-m מכונות. לכל משימה i יש רשימה $L(i)$ של מכונות שעליהם היא יכולה להתבצע. לכל מכונה j יש חסם a_j על מספר המשימות שהיא יכולה לבצע. רוצים למצוא דרך לבצע את כל המשימות או להגיד שאין דרך כזאת.

תאור האלגוריתם:

א. נבנה גרף $G=(V,E)$ בצורה הבאה: לכל משימה i ועבור כל מכונה j ניצור צומת מייצג בגרף. בנוסף, נוסיף לגרף צומת מקור s וצומת בור t. את כל הצמתים המייצגים משימות נחבר בקשת לצומת s עם קיבולת 1. כל צומת המייצג משימה j נחבר אל צומת t עם קיבולת a_j. כל צומת משימה i נחבר לצומתי המכונה בהם היא יכולה להתבצע (ע"פ רשימת $L(i)$). קשתות אלו יהיו בעלות קיבולת 1.

ב. נמצא זרימה מקסימאלית בגרף באמצעות האלגוריתם של דיניץ'.

ג. אם הזרימה המקסימאלית קטנה מ- n, נחזיר "לא". אחרת, נעבור על כל הקשתות (u_i,v_j) המחברות בין משימה למכונה. אם הקשת רוויה (כלומר קיימת בה זרימה), נגדיר את משימה i להתבצע במכונה j.

הוכחת נכונות:
קיימת דרך לבצע את כל המשימות ⇔ הזרימה המקסימאלית היא n (והיא מייצגת את סדר המשימות).

⇐ נניח שקיימת דרך לבצע את כל המשימות תחת ההגבלות הנתונות. נשים לב שקיבולת היציאה מ-s היא n ולכן הזרימה המקסימאלית לא יכולה להיות גדולה מ-n. עתה כיוון שקיימת דרך לבצע את המשימות, כל משימה מתבצעת באחת המכונות. עבור כל משימה נוכל אם כן לבדוק היכן היא מתבצעת, ולהזרים במסלול זה בגרף. ניתן לבצע הזרמה זו כיוון שכל מכונה יכולה להזרים אל t ככמות המשימות שהיא יכולה לבצע, וכן כל משימה מחוברת ל-s בקיבולת 1. לכן, אם קיימת דרך לבצע את המשימות תחת ההגבלות, הזרימה המקסימאלית בגרף הינה לפחות n. סה"כ קיבלנו שהזרימה המקסימאלית שווה ל-n.

⇒ הזרימה המקסימאלית היא n. כיוון ש-s מחובר לכל משימה עם קיבולת 1, המשמעות היא שלכל צומת נכנסת זרימה 1 בדיוק. היציאה מכל צומת משימה היא לצומת מכונה ומשם אל t. כל צומת מכונה מחובר ל-t עם קיבולת המשימות שהמכונה יכולה לבצע. לכן, אם קיימת זרימה כזו, נוכל להסתכל על הזרימה ולסדר לפיה את המשימות למכונות. מכאן, שאם הזרימה המקסימאלית היא n קיימת דרך לבצע את כל המשימות (וניתן לבצע אותן על פי הזרימה).

ניתוח סבוכיות:

א. הוספת הצמתים s ו-t – $O(1)$
הוספת צמתי המשימות וחיבורן ל-s עם קיבולת 1 – $O(n)$
הוספת צמתי המכונות וחיבורן ל-t עם קיבולת a_j – $O(m)$
הוספת קשתות (קיבולת 1) בין כל משימה למכונות שיכולות לבצע אותה – $O(mn)$

סה"כ עבור שלב זה - $O(mn)$

ב. מציאת זרימה מקסימלית – $O[(m+n+mn)\cdot(m+n)^2] = O[mn(m+n)^2]$

ג. בדיקה האם הזרימה המקסימאלית היא n ואם כן, בדיקת כל הקשתות בין המשימות והמכונות – $O(mn)$

סה"כ סבוכיות זמן ריצה – $\mathbf{O[mn(m+n)^2]}$

▪ מ.ש.ל

4. במסיבה משתתפים n בנים ו- n בנות. כל בן מכיר בדיוק k בנות, וכל בת מכירה בדיוק k בנים, כאשר $k>0$, ויחס ההכרות הוא הדדי. הוכיחו:

א. שכולם יכולים להשתתף בריקוד זוגות שבו כל זוג מורכב מבן ובת שמכירים זה את זה.

הוכחה:

נבנה גרף דו צדדי $G=(X,Y,E)$. ב-X נשים קודקודים אשר ייצגו את הבנים בקבוצה. בצורה דומה Y יכיל קודקודים המייצגים את הבנות בקבוצה. קבוצה E תכיל קשתות המייצגות את הקשרים ההדדיים בין הבנים והבנות.
נראה עתה שלכל קבוצה $A\subseteq X$ מתקיים $|A|\le|\Gamma(A)|$. נניח בשלילה כי $|A|>|\Gamma(A)|$. כיוון שכל בן מכיר בדיוק k בנות וכל בת מכירה בדיוק k בנים, מכל קודקוד ב-A יוצאים k קודקודים אל $\Gamma(A)$. כלומר יש $k|A|$ קשתות מ-A אל $\Gamma(A)$. דרגת הקודקודים ב-$\Gamma(A)$ היא k. לכן, יש $k|\Gamma(A)|$ קודקודים ממנה אל A. כיוון שהקשר בין הקודקודים הוא הדדי, הקשתות המחוברות אל קודקודים שב-A מוכלות בקבוצת הקשתות המחוברות אל $\Gamma(A)$. לכן נקבל כי $k|A|\le k|\Gamma(A)|$. כלומר, $|A|\le|\Gamma(A)|$ בסתירה להנחה בשלילה.

קיבלנו כי $|A|\le|\Gamma(A)|$. לכן, תנאי משפט Hall מתקיים ומכאן שקיים זיווג מושלם. כלומר, כולם יכולים להשתתף בריקוד זוגות בו כל זוג מורכב מבן ובת המכירים זה את זה.

ב. שניתן לארגן k ריקודים, כך שכולם ירקדו בדיוק פעם אחת עם כל מי שהם מכירים.

הוכחה:

נוכיח באמצעות אינדוקציה.

שלב א': <u>שלב הבדיקה</u> – עבור $k=1$ קיים רק זיווג יחיד (הבן חייב להכיר את הבת והבת חייבת להכיר את הבן) ולכן ניתן לבצע הרקדה כזו.

שלב ב': <u>שלב המעבר</u> – נניח שהמשפט נכון עבור $k-1$ ונוכיח עבור k.
במקרה בו כל בן מכיר k בנות וכל בת מכירה k בנים, ניתן לבצע הרקדה (ע"פ ההוכחה בסעיף הקודם). נוריד את הקשתות של הזוגות שנבחרו להרקדה. כלומר, עבור בן ובת הרוקדים יחד, נוריד את הקשת המסמנת את הקשר ההדדי ביניהם. לאחר הסרת הקשתות נקבל גרף דו"צ בו דרגת כל קודקוד היא $k-1$. עבור מצב זה קיימת הרקדה ע"פ הנחת האינדוקציה.

מ.ש.ל ▪

5. נתונה רשת זרימה $G=(V,E)$ עם מקור s ובור t, וקיבולים שלמים על הקשתות, ונתונה זרימה מקסימלית f, כך שלכל $u,v\in V$, $f(u,v)$ שלם. נניח שמגדילים את הקיבול של קשת מסוימת e ב- 1. תארו אלגוריתם יעיל לעדכון הזרימה המקסימלית.

תאור האלגוריתם:

א. נגדיל את קיבולת הקשת e.

ב. נבנה רשת שיורית ונבדוק האם קיים מסלול בין s ל-t.

ג. אם לא קיים, נסיים. אם קיים, נעדכן את הזרימה בגרף ונסיים.

הוכחת נכונות:

נשים לב שכתוצאה מהגדלת הקיבולת של הקשת ב-1, הזרימה המקסימאלית יכולה לגדול לכל היותר ב-1. הגדלה של הזרימה המקסימאלית יכולה להתרחש רק כאשר הקשת נמצאת בחתך מינימאלי יחיד [illegible]

במידה ואכן הקשת נמצאת על חתך מינימאלי יחיד, קיים מסלול בין s אל t בו היא נמצאת ושאר הקשתות במסלול אינן רוויות. לכן, לאחר הגדלת הקיבולת ב-1 יהיה מסלול בין s אל t ברשת השיורית ונוכל להגדיל את הזרימה המקסימאלית ב-1.
במידה והקשת אינה על חתך מינימאלי יחיד, לא קיים מסלול בין s אל t בו היא נמצאת ויתר הקשתות אינן רוויות (כלומר יש לפחות עוד קשת אחת רוויה במסלול). לכן, ברשת השיוריות לא יהיה מסלול בין s אל t (כיוון שבעת מציאת הזרימה המקסימאלית לפני העדכון לא היה מסלול ועתה לא נוצר מסלול כזה). מכאן, שהזרימה המקסימאלית לא תתעדכן במקרה זה כנדרש.

ניתוח סבוכיות:

א. מציאת הרשת השיוריות לאחר העדכון – O(|E|)

ב. בדיקה האם קיים מסלול ברשת השיוריות בין s ל-t – O(|E|+|V|)

ג. עדכון הזרימה במידת הצורך – O(|E|)

סה"כ סבוכיות זמן ריצה של האלגוריתם – **O(|E|+|V|)**

▪ מ.ש.ל

6. נתונה רשת זרימה G=(V,E) עם מקור s ובור t, וקיבולים שלמים על הקשתות, ונתונה זרימה מקסימלית f , שנמצאה ע"י האלגוריתם של Ford-Fulkerson, כך שלכל u,v∈V, f(u,v) שלם. נניח שמקטינים את הקיבול של קשת מסוימת e ב- 1. תארו אלגוריתם יעיל לעדכון הזרימה המקסימלית.

תאור האלגוריתם:

א. נבדוק אם הקשת e רוויה. אם לא, נקטין את הקיבולת ב-1 ונסיים. אין שינוי בזרימה המקסימאלית.

ב. אם הקשת e כן רוויה, נגדיר "רשת זרימה". כלומר נגדיר גרף $G_{flow}=(V, E_{flow})$ כך שהקבוצה E_{flow} תכלול את כל הקשתות מהגרף המקורי בהם הזרימה גדולה מ-0.
ב-G_{flow} נחפש מסלול מ-s אל t העובר דרך הקשת e=(u,v) (נוכל לעשות זאת באמצעות הרצת BFS מ-s ומציאת מסלול באמצעות מצביעים אחוריים החל מ-u והרצת BFS נוסף מ-v ומציאת מסלול באמצעות מצביעים אחוריים מ-t).

ג. במסלול שמצאנו נעדכן את הזרימה של כל קשת להיות קטנה ב-1.

ד. לסיום, נמצא בגרף המקורי עם הזרימה המעודכנת רשת שיורית ונבדוק אם קיים בה מסלול משפר. אם כן, נעדכן לפיו את הזרימה.

הוכחת נכונות:
אם הקשת e אינה רוויה, הרי שהקטנת הקיבולת ב-1 לא תשפיע על הזרימה. לכן, נניח שהקשת אינה רוויה. במידה והקשת רוויה, היא תופיע ברשת הזרימה שהגדרנו ולכן יהיה מסלול בין s אל t העובר דרכה. הקטנת הזרימה בה ב-1, תשפיע על הזרימה בכל המסלול ולכן, כשלב ראשוני, עלינו להקטין את הזרימה בכל המסלול כדי לשמור על כללי זרימה חוקית.
נשים לב שכתוצאה מהקטנת הקיבולת של הקשת ב-1, הזרימה המקסימאלית יכולה לקטון לכל היותר ב-1. הקטנה של הזרימה המקסימאלית יכולה להתרחש רק כאשר הקשת נמצאת בחתך מינימאלי בגרף.
במידה ואכן הקשת נמצאת על חתך מינימאלי, הקטנת הקיבולת של הקשת ב-1 תקטין את קיבולת החתך וכך ייוצר חתך מינימאלי חדש בגרף הקטן ב-1 מהחתך הקודם. במקרה כזה, בעת מציאת הרשת השיורית של הגרף, לא יהיה מסלול בין s אל t ברשת זו ולכן לא יהיה ניתן לשפר את הזרימה חזרה לזרימה המקורית. אם הקשת לא נמצאת על חתך מינימאלי (בגרף המקורי), הרי שהקטנת הקיבולת ב-1 לא תפגע בזרימה המקורית של הקשת ולכן, ברשת השיוריות יהיה בוודאות מסלול מ-s אל t שניתן להזרים בו בדיוק 1.

ניתוח סבוכיות:

א. בדיקה האם הקשת רוויה – $O(1)$.

ב. מציאת רשת הזרימה – $O(|E|)$

ג. חיפוש מסלול העובר דרך הקשת ברשת הזרימה – $O(|E|+|V|)$

ד. עדכון הזרימה במסלול שמצאנו – $O(|E|)$

ה. מציאת הרשת השיוריות לאחר העדכון – $O(|E|)$

ו. בדיקה האם קיים מסלול ברשת השיוריות בין s ל-t – $O(|E|+|V|)$

ז. עדכון הזרימה במידת הצורך – $O(|E|)$

סה"כ סבוכיות זמן ריצה של האלגוריתם – $\mathbf{O(|E|+|V|)}$

▪ מ.ש.ל

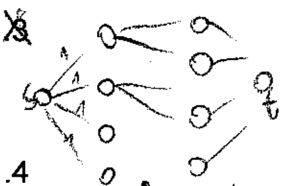
אלגוריתמים – תרגיל 4

<u>הנחיה כללית</u>: עבור כל אחת מהשאלות שבהן נדרש למצוא אלגוריתם יש להוכיח את נכונותו ולנתח את סיבוכיות זמן הריצה שלו.

1. נתונה רשת זרימה שבה בנוסף לחסמים העליונים c(e) על הקשתות יש גם חסם תחתון b(e) על כל קשת, כלומר הזרימה בקשת e, ‏f(e), צריכה לקיים $b(e)\le f(e)\le c(e)$. מהם השינויים הנדרשים באלגוריתם של Ford-Fulkerson כדי להתאימו למציאת זרימה מקסימלית תחת תנאים אלה, כאשר נתונה זרימה חוקית ברשת?

2. הוכיחו את משפט מנגר עבור קודקודים:
יהי $G=(V,E)$ גרף (מכוון או לא), ו- $s,t\in V$, ונניח שאין בגרף קשת (s,t). אז המספר המקסימלי של מסלולים זרים בקודקודים מ- s ל- t שווה למספר המינימלי של קודקודים שצריך להסיר מ- G כדי לנתק את t מ- s.

3. נתונות n משימות ו-m מכונות. לכל משימה i יש רשימה L(i) של מכונות שעליהם היא יכולה להתבצע. לכל מכונה j יש חסם a_j על מספר המשימות שהיא יכולה לבצע. רוצים למצוא דרך לבצע את כל המשימות או להגיד שאין דרך כזאת.



4. במסיבה משתתפים n בנים ו- n בנות. כל בן מכיר בדיוק k בנות, וכל בת מכירה בדיוק k בנים, כאשר k>0, ויחס ההכרות הוא הדדי. הוכיחו:
   א. שכולם יכולים להשתתף בריקוד זוגות שבו כל זוג מורכב מבן ובת שמכירים זה את זה.
   ב. שניתן לארגן k ריקודים, כך שכולם ירקדו בדיוק פעם אחת עם כל מי שהם מכירים.

5. נתונה רשת זרימה $G=(V,E)$ עם מקור s ובור t, וקיבולים שלמים על הקשתות, ונתונה זרימה מקסימלית f, כך שלכל $u,v\in V$, ‏f(u,v) שלם. נניח <u>שמגדילים</u> את הקיבול של קשת מסוימת e ב- 1. תארו אלגוריתם יעיל לעידכון הזרימה המקסימלית.

6. נתונה רשת זרימה $G=(V,E)$ עם מקור s ובור t, וקיבולים שלמים על הקשתות, ונתונה זרימה מקסימלית f , שנמצאה ע"י האלגוריתם של Ford-Fulkerson, כך שלכל $u,v\in V$, ‏f(u,v) שלם. נניח <u>שמקטינים</u> את הקיבול של קשת מסוימת e ב- 1. תארו אלגוריתם יעיל לעידכון הזרימה המקסימלית.