אנליזה נומרית – שיעור 10

הנוסחאות נכונות עד לדרגה מסוימת.

אינטגרציה נומרית:
- מלבן.
- טרפז
- Midpoint
- Simpson.
- Corrected Trapezoid

Composite rule –

<u>פולינומים אורתוגונליים</u>

$\{P_k\}$ אם P_k פולינום ממעלה k.
$$<P_k, P_l> = \gamma_l \cdot \delta_{k,l}$$
מספר ← γ_l ; $\delta_{k,l} = \begin{cases} 0 & k \neq l \\ 1 & k = l \end{cases}$

<u>תכונות</u>

1. אם Q פולינום ממעלה קטנה או שווה ל-K. אז $Q = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \cdot P_j$

2. אם Q פולינום ממעלה קטנה (ממש) מ-k אז $Q \perp P_k$, כלומר: $<P_k, Q> = 0$

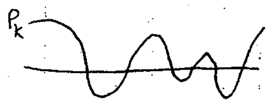
$$<f, g> = \int_a^b f \cdot g \underbrace{w}_{\text{פונקציה שגדולה מ-0 (כמעט בכל מקום)}} dx \quad , \quad <f, g> = \sum_{j=0}^{k} f_j \cdot g_j \cdot w_j$$
almost ← a.e → everywhere
$$f_j = f(x_j) \quad , \quad x_j \in [a, b]$$

3. ל-P_k יש k אפסים ממשיים ופשוטים בקטע (a,b)

כלומר, $P_k = \alpha \cdot (x - \xi_{1,k}) \cdot \ldots \cdot (x - \xi_{k,k})$. כאשר: $\xi_{1,k} \ldots \xi_{k,k} \in (a,b)$

<u>הוכחה:</u> (טענה 3)
נבחר $\tilde{\xi}_{1,k} \ldots \tilde{\xi}_{r,k}$ האפסים (הממשיים) בקטע שבו P_k מחליף סימן
נבנה $Q = s \cdot (x - \tilde{\xi}_{1,k}) \cdot \ldots \cdot (x - \tilde{\xi}_{r,k})$, $s = \pm 1$, כך של-Q ו-P_k יש את אותו הסימן.
s היא פונקציה לפעמים 1 ולפעמים (1-).

נניח ש-$r < k$
(בשלילה):



נובע כי Q הוא פולינום ממעלה קטנה ממש מ-K. לכן $<P_k, Q> = 0$ לפי טענה 2.

אבל, $<P_k, Q> > 0$ כי לשניהם יש את אותו הסימן.

לפי ההגדרה $\int_a^b \underbrace{P \cdot Q}_{\text{תמיד} > 0} \cdot w_{>0} \, dx > 0$ מכפלה פנימית באינטגרל, ומכאן שמה שבאינטגרל ≥ 0 ⟸ האינטגרל חיובי וגם המכפלה הפנימית.

⟸ אזי $r \geq k$. אבל בגלל ש-r לא יכול להיות גדול מ-K, אז $r = k$.

אם בהינתן מכפלה פנימית, יש פולינומים נקבעים ביחידות עד כדי קבוע כפלי.

<u>הוכחה:</u> תהליך גרם-שמידט. (מקבלים בסיס יחיד).

5: פולינומים אורתוגונליים מקיימים את יחס הרקורסיה:

$$(*) \quad P_{j+1}(x) = A_j \cdot (x - B) \cdot P_j(x) - C_j \cdot P_{j-1}(x)$$

כאשר: α_j המקדם של x^j ב-P_j , $A_j = \frac{\alpha_{j+1}}{\alpha_j}$, $P_{-1} \equiv 0$.
$$B_j = \frac{<x \cdot P_j(x), P_j(x)>}{S_j}$$
$S_j = <P_j, P_j>$.

$$C_j = \begin{cases} \text{שרירותי} & j=0 \\ \frac{A_j\cdot S_j}{A_{j-1}\cdot S_{j-1}} & j>0 \end{cases}$$

הערה:
מספיק להראות ש: $p_{j+1}\perp p_{j-1}$ ו- $p_{j+1}\perp p_j$.

כי עבור $l<j-1$ אז
נכון מהגדרה האורתוגונליות
$$\begin{cases} \langle p_{j-1}, p_l\rangle = 0 \\ \langle p_j, p_l\rangle = 0 \end{cases}$$

$$\langle x\cdot p_j, p_l\rangle = \langle p_j, \underbrace{x\cdot p_l}_{\text{המעלה של זה לכל היותר } j-1 \text{ כי } l<j-1}\rangle = 0 \rightarrow \text{לפי הגדרה.}$$

$$Q_k = \sum_r^k p_r\cdot\alpha_r$$

הצבה זו (את) כאן

$$\langle p_{j+1}, p_j\rangle = A_j\cdot\left[\cancel{\langle x\cdot p_j, p_j\rangle} - \frac{\overbrace{\cancel{\langle x p_j, p_j\rangle}}^{B}}{\cancel{\langle p_j, p_j\rangle}}\cdot\cancel{\langle p_j, p_j\rangle}\right] - C_j\cdot\underbrace{\cancel{\langle p_{j-1}, p_j\rangle}}_{=0}$$

$$\langle p_{j+1}, p_j\rangle = 0 \quad \text{הכל התאפס או הצטמצם}$$

$$\langle p_{j+1}, p_{j-1}\rangle = A_j\left[\langle x\cdot p_j, p_{j-1}\rangle - B_j\cdot\underbrace{\langle p_j, p_{j-1}\rangle}_{\text{0 מ-טענה 2.}}\right] - \frac{A_j\cdot S_j}{A_{j-1}\cdot\cancel{S_{j-1}}}\cdot\underbrace{\cancel{\langle p_{j-1}, p_{j-1}\rangle}}_{S_{j-1}}$$

$$\langle p_{j+1}, p_{j-1}\rangle = A_j\,\langle x\cdot p_j, p_{j-1}\rangle - A_j\cdot\frac{S_j}{A_{j-1}} \quad S_j=\langle p_j, p_j\rangle$$

$$\langle p_{j+1}, p_{j-1}\rangle = A_j\cdot\langle p_j, \left(x\cdot p_{j-1} - \frac{p_j}{A_{j-1}}\right)\rangle$$ מ' שני מעברים (העברנו x לצד הימני וכו').

הצבה של $A_{j-1}=\frac{\alpha_j}{\alpha_{j-1}}$

$$\langle p_{j+1}, p_{j-1}\rangle = A_j\cdot\langle p_j, \left(x\cdot p_{j-1} - \frac{\alpha_{j-1}}{\alpha_j}\cdot p_j\right)\rangle \qquad (\star)$$

יוצא כי:

(I) $$x\cdot p_{j-1} = x\cdot(\alpha_{j-1}\cdot x^{j-1}+\dots) = \alpha_{j-1}\cdot x^j+\dots$$

(II) לשים לב שעבר ל- p_j
$$\Rightarrow \frac{\alpha_{j-1}}{\alpha_j}\cdot p_j = \frac{\alpha_{j-1}}{\cancel{\alpha_j}}\cdot\cancel{\alpha_j}\cdot x^j+\dots = \alpha_{j-1}\cdot x^j+\dots$$

פולינום ממעלה $j-1$ לכל היותר – ולכן ניצב ל- p_j.

ב-$(\star)$ יש $\star$ והמעלה של $\left(x p_{j-1} - \frac{\alpha_{j-1}}{\alpha_j}p_j\right)$ היא לכל היותר $j-1$
כי מה שבהגדרה x^j מצטמצם לפי I ו-II.

$$\Rightarrow \langle p_{j+1}, p_{j-1}\rangle = A_j\,\langle p_j, \text{משהו מדרגה לכל היותר } j-1\rangle = 0$$

נחזור לאינטגרציה!
– רוצים לחשב נ.ב.מ. (כמעט בכל מקום), $w>0$
$$\int_a^b g(x)\cdot w(x)\,dx$$

$$g = p_k(x) + g[x_0\dots x_k, x]\cdot\psi_{k+1}(x)$$

$$\psi_{k+1} = \prod_{j=0}^k (x-x_j)$$

p_k הוא ממעלה k שאנחנו...

נקודות כלשהן בינתיים לא נבחר...

$$\Rightarrow \int_a^b g(x)\cdot w(x)\,dx = \int_a^b p_k\cdot w\,dx + \int_a^b g_k[\dots]\cdot\psi_{k+1}\cdot w\,dx$$

$$\int_a^b p_k\cdot w\,dx = \int_a^b \sum_{j=0}^k \left(g(x_j)\cdot l_j(x)\right)\cdot w(x)\,dx = \sum_{j=0}^k g(x_j)\cdot\underbrace{\int_a^b l_j(x)\cdot w(x)\,dx}_{A_j}$$

$$E = \int_a g[x_0 \dots x_k, x] \cdot \psi_{k+1}\, w\, dx$$

נניח ש: $\int_a^b \psi_{k+1} \cdot w \cdot dx = 0$, אז הנק' $x_0, \dots, x_k$ הם שורשים של פולינום אורתוגונלי שמתאים למכפלה

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f g w\, dx$$

לפי זה

אז $\int_a^b \psi_{k+1} w\, dx = \int_a^b \psi_{k+1} \cdot 1 \cdot w\, dx = \langle \psi_{k+1}, 1\rangle = 0$

כי הדרגה פה נמוכה יותר מ-, והם אורתוגונליים

אז נגדיל את הסדר:

$$E = \int_a^b g[x_0 \dots x_k, x_{k+1}, x] \cdot \underbrace{(x - x_{k+1}) \cdot \psi_{k+1}}_{\psi_{k+2}}(x) \cdot w(x)\, dx$$

$$\int_a^b (x - x_{k+1}) \psi_{k+1} \cdot w\, dx = \langle \psi_{k+1}, (x - x_{k+1})\rangle = 0$$

ננסה להגדיל שוב את הסדר

$$\vdots$$

$$\int_a^b g[x_0 \dots x_k, x_{k+1} \dots x_{2k}, x] \cdot (x - x_{k+1}) \cdots (x - x_{2k}) \cdot \psi_{k+1} \cdot w\, dx$$

$$\int_a^b (x - x_{k+1}) \cdots (x - x_{2k}) \cdot \psi_{k+1}\, w\, dx = 0$$

נגדיל את הסדר...

$$\int_a^b g[x_0 \dots x_k\ x_{k+1} \dots x_{2k+1}\ x] \cdot (x - x_{k+1}) \dots (x - x_{2k+1}) \cdot \psi_{k+1}\, w\, dx$$

$$\vdots$$

$$(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_{2k+1}) \cdot \psi_{k+1}$$

נרצה ש- יהיה סימן קבוע

אפשרי אם נבחר: $x_{k+j} = x_j$

$$\Longrightarrow \int_a^b g[x_0 \dots x_{2k+1}, x]\, \psi_{k+1}^2 \cdot w \cdot dx$$

$$\frac{g(\eta)^{(2k+2)}}{(2k+2)!} \cdot \int_a^b \psi_{k+1}^2 \cdot w\, dx$$

~~דוגמה~~

$$\int_a^b f\, dx$$

$$x = [(b-a) \cdot t + (a+b)] \cdot \frac{1}{2}$$

החלפת משתנים- לפי הנוסחה:

$$\Longrightarrow \int_a^b f(x)\, dx = \int_{-1}^1 f(x(t)) \left(\frac{b-a}{2}\right) \cdot dx$$

הנגזרה של x לפי t

$\int f(x) dx = \int f(t) \frac{dx}{dt} dt$ לפי החלפה בהתאם באינטגרל.

$$I(f) = \int_{-1}^1 f \cdot \underset{1}{\underset{\shortparallel}{w}}\, dt$$

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^1 f \cdot g \cdot 1 \cdot dx$$

פולינומי Lagrandre..:

$\xi_0 = 0$ $\qquad P_0 = 1$

$\xi = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\qquad P_1 = x$

$\qquad P_2 = \frac{3}{2} \cdot (x^2 - \frac{1}{3})$

$\xi = \pm\sqrt{\frac{3}{5}}, \xi = 0$ $\qquad P_3 = \frac{5}{2}(x^3 - \frac{3}{5}x)$

$$P_{k+1}(x) = \frac{1}{k+1}[(2k+1) \cdot x \cdot P_k(x) - k \cdot P_{k-1}(x)$$

לפי הדרגה של $P_k(1)$ לא מתאפס (לפי הנוסחה שנמצא)

$$P_k(1) = 1$$

נבחר את $k = 1$:

ויש משתנים של פולינום זה שני נק' אפסים.

$$\int_{-1}^1 f\, dx \approx A_0 \cdot f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + A_1 \cdot f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

נכון לפולינומים ממעלה 3.

$$A_0 = 1, \quad A_1 = \int_{-1}^1 l_1(x)\, dx = \int_{-1}^1 \frac{x - (-\frac{1}{\sqrt{3}})}{\frac{1}{\sqrt{3}} - (-\frac{1}{\sqrt{3}})} = 1$$

פולינומי יעקובי

$$\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} fg\, w\, dx$$

$$w(x) = (1-x)^{\alpha}\cdot(1+x)^{\beta} \qquad \alpha,\beta > 0$$

פולינומי צ'בישב

$$\alpha=\beta=\tfrac{1}{2}$$

$$(1)\ T_n = \cos(n\cdot\cos^{-1}(x))$$

משפט: $T_n(x)$ הוא פולינום ממעלה n

$$\left\{\begin{array}{l} T_0(x) = 1 \\ T_1(x) = x \end{array}\right. \text{ זה ברור.}$$

נוסחת נסיגה:

$$T_{n+1} = 2x\cdot T_n - T_{n-1}$$

הוכחה:

זהות טריגונומטרית:

$$\cos((n+1)\phi)+\cos((n-1)\phi) = 2\cos\phi\cdot\cos(n\cdot\phi)$$

$$\cos\theta = (e^{i\theta}+e^{-i\theta})\cdot\frac{1}{2}, \quad \sin\theta = (e^{i\theta}-e^{-i\theta})\cdot\frac{1}{2i}$$

מציבים באגף ימין ומכניסים איברים של ימין להוכחה את הזהות.

נסמן: $\phi = \cos^{-1}x \Leftarrow \cos\phi = x$

זהות

$$T_{n+1}(x) = \cos((n+1)\phi) = 2\cos\phi\cos(n\phi) - \cos((n-1)\phi) =$$

$$= 2x\,T_n(x) - T_{n-1}(x)$$

מאחר ו- T_0, T_1 פולינומים גם T_n פולינום