מציאת אפסים של פונקציה

$f(X_0) = b_0$

$F(X_0, b_0) = f(X_0) - b_0 = 0$

$F(X_1, b) = 0$

$X = X_0 + \delta x \quad ; \quad b = b_0 + \delta b$

$F_x \delta x = -F_b \delta b$

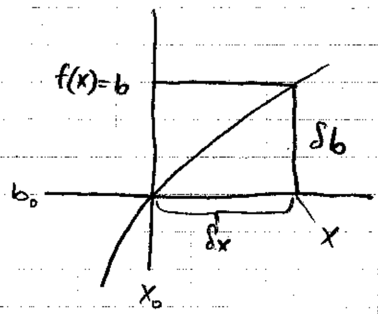
מעניין אותנו ההתפרדות בין δb ל- δx.

K_{abs} הוא משהו הקרוב לקבוע ההפרדות.

(שווה לנגזרת של x/b)

$$k_{abs} = \frac{|\delta x|}{|\delta b|} = \frac{|F_b|}{|F_x|} = \frac{|-1|}{|f_x|} = \frac{1}{|f_x|} \qquad \left(f_y = \frac{\partial F}{\partial x}\right)$$

$|\delta x| = |\delta b| \cdot k_{abs}$



נשים לב שכשהנגזרת מתאפסת יש לנו בעיה ומאוד קשה לעשות את הדברים הללו.

נניח שהנגזרת אינה מתאפסת.

<u>סדר התכנסות!</u> נאמר שהסדרה $\{X_k\}$ מתכנסת ל- α מסדר $P \geq 1$

אם $\forall k > K$ מתקיים $\frac{|X_{k+1} - \alpha|}{|X_k - \alpha|^P} \leq C$

אם $P = 1$ אז $|C| < 1$.

(כאשר C קבוע כלשהו שיכול להיות גם גדול מאוד)

אנחנו נרצה לקבל את סדרות שמתכנסות מסדר גבוה ככל הניתן.

<u>דוגמא:</u> $C = \frac{1}{2}$, $X_0 = 1$, $\alpha = 0$.

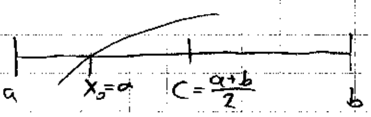
	k	1	2	3	4 ..	5	6	8	50
P=1		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	□	$1/32$	□	□	$8.9 \cdot 10^{-16}$
P=1.5		0.5	0.177	0.0036	□	0.001	□	$1.5 \cdot 10^{-15}$	□
P=2		0.5	0.125	0.007	$6 \cdot 10^{-10}$	□	$1 \cdot 10^{-19}$	□	□

15.3.09 (6)

אנליזה נומרית - שיעור 2

שיטות

שיטת החציה Bisection



שיטת "אריה במדבר". נגדיר את $c=\frac{a+b}{2}$ ונפעל לפי האלגוריתם הבא:

```
if f(a)·f(c) < 0 then b = c
        else a = c
        end if
if (b-a) < tol then exit
        else loop
```

* עבור אלגוריתם זה אנו מניחים שיש רק חציה אחת של הפונקציה בקטע ושהיא רציפה *

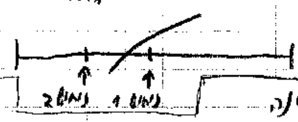
(א) מהי השגיאה שלנו? $|\delta x| \le \frac{|b-a|}{2^{k+1}}$

הסיבה שאנו משתמשים ב-k+1 היא כיוון שהניחוש שלנו הוא תמיד אמצע הקטע. את הקטע חילקנו k פעמים ולאחר מכן בחרנו באמצע ולכן k+1.

(ב) מה סדר ההתכנסות שלנו?

לפי ההגדרה בסדר 1 $|x_{k+1}-\alpha| \le c\cdot|x_k-\alpha|$. במקרה שלנו זה אפילו לא קורה.

נסתכל על המצב הבא



נשים לב שבמקרה הזה, השגיאה בניחוש הראשון מאוד קטנה אך בניחוש השני השגיאה כבר גדלה. כלומר אין מונוטוניות.

נשים לב שהשיטה דורשת הרבה איטרציות יחסית כדי להגיע להתכנסות אך היתרון שלה הוא שכמעט תמיד היא מתכנסת.

האם ניתן לשפר? נשים לב שבשיטה השתמשנו בסימן בלבד, ניתן להשתמש גם בערכים כדי לשפר את כמות האיטרציות.

משפחת השיטות הגיאומטריות

אנו מניחים $f(\alpha)=0$, $f'(\alpha)\neq 0$. אנו מתחילים מטור טיילור

$$f(x) = \underbrace{f(\alpha)}_{0} + (x-\alpha)\cdot f'(\xi) \qquad \xi\in[\alpha, x]$$

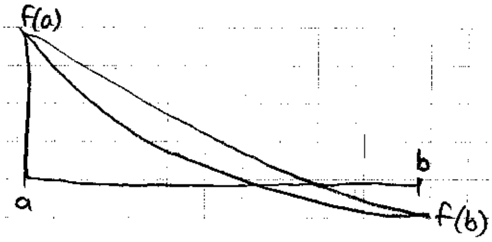
נחלץ את α:

$$\alpha = x - \frac{f(x)}{f'(\xi)}$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{q_k}$$

(כאשר q_k הוא ניחוש (קירוב) ל-$f'(\xi)$).

I שיטת Cord (מיתר)



$$X_0 = b$$

$$q_k = q = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$X_{k+1} = X_k - \frac{f(X_k)}{q} = X_k - f(X_k)\cdot\frac{b-a}{f(b)-f(a)}$$

התכנסות:

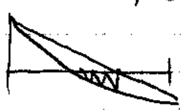
$$(X_{k+1}-\alpha) = (X_k-\alpha) - f(X_k)\frac{b-a}{f(b)-f(a)}$$

$$\frac{(X_{k+1}-\alpha)}{(X_k-\alpha)} = 1 - f(X_k)\frac{b-a}{f(b)-f(a)}$$

$$\frac{|X_{k+1}-\alpha|}{|X_k-\alpha|} = \left|1-\underbrace{\left(\frac{f(X_k)-0}{X_k-\alpha}\right)}_{\approx f'(\alpha)}\underbrace{\left(\frac{b-a}{f(b)-f(a)}\right)}_{\approx \frac{1}{f'(\alpha)}}\right|$$

אם a ו-b מספיק קרובים ל-α אז $\frac{|X_{k+1}-\alpha|}{|X_k-\alpha|} <<< 1$.

(הסיבה לכך היא שבכל פעם אנו מתקרבים ל-α וגם אנו קרובים מספיק מתקיים אי השוויון.
הדרך בה אנו מתקרבים אל α היא כך:

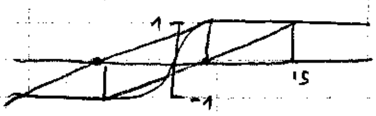


בכל פעם מוצאים אנך לציר וממנו מחשבים

).

דוגמא לחוסר התכנסות:

דוגמא אהבה



*/ בכל פעם המרחק רק גדל
לכן אין התכנסות */

$$f = \tanh 5X,\quad a=-10,\quad b=15,\quad q=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\approx\frac{2}{25}=0.08$$

$$f'(0) = 5$$

$$\left|1-\frac{f(X_k)-f(\alpha)}{X_k-\alpha}\cdot\frac{b-a}{f(b)-f(a)}\right| \approx 61.5 > 1 \quad \left(=\left|1-5\cdot\frac{1}{0.08}\right|\right)$$

לכן, השיטה הזו אינה שימושית בד"כ.

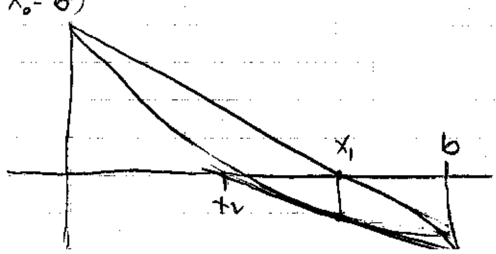
II שיטת Secant (שיטה מאוד שימושית)

בשיטה זו אנו מגדירים את q_k כך:

$$q_k = \frac{f(X_k)-f(X_{k-1})}{X_k - X_{k-1}}$$

$$\left(X_{k+1} = X_k - f(X_k)\cdot\frac{X_k-X_{k-1}}{f(X_k)-f(X_{k-1})}\quad X_{-1}=a\quad X_0=b\right)$$

(סתכל) הצגה גרפית:



*/ כלומר, מצאנו נקודה חדשה, הורדנו אנך באמצעותו קבלנו שיפוע חדש. איתו מצאנו נקודה חדשה וכך הלאה */

<u>משפט</u> אם $f(\alpha)=0,\ f'(\alpha)\neq0,\ f''(\alpha)\neq0$ אז סדר ההתכנסות של שיטת secant הוא $\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx1.63$

<u>הוכחה:</u>

$$x_{k+1}=x_k-f(x_k)\cdot\frac{x_k-x_{k-1}}{f(x_k)-f(x_{k-1})}$$

$$x_k=\alpha+e_k\ ;\ (e_k=x_k-\alpha)\Rightarrow e_{k+1}=e_k-f(x_k)\cdot\frac{e_k-e_{k-1}}{f(x_k)-f(x_{k-1})}$$

$$=\frac{[\cancel{f(x_k)}-f(x_{k-1})]e_k-f(x_k)(\cancel{e_k}-e_{k-1})}{f(x_k)-f(x_{k-1})}$$

$$\Rightarrow e_{k+1}=\frac{f(x_k)\cdot e_{k-1}-f(x_{k-1})e_k}{f(x_k)-f(x_{k-1})}\qquad(*)$$

(טיילור) $f(x_k)=f(\alpha+e_k)=\underbrace{f(\alpha)}_{0}+e_kf'(\alpha)+\frac12e_k^2f''(\alpha)+\dots$

לכן המכנה: $f(x_k)-f(x_{k-1})=f'(\alpha)(e_k-e_{k-1})+\dots$

והמונה: $[\cancel{e_kf'(\alpha)}+\frac12e_k^2f''(\alpha)+\dots]e_{k-1}-[\cancel{e_{k-1}f'(\alpha)}+\frac12e_{k-1}^2f''(\alpha)+\dots]e_k$

$$=\frac12f''(\alpha)\cdot e_k\cdot e_{k-1}(e_k-e_{k-1})$$

נציב ב-(*):

$$e_{k+1}=\frac{\frac12f''(\alpha)\cdot e_k\cdot e_{k-1}\cancel{(e_k-e_{k-1})}}{f'(\alpha)\cancel{(e_k-e_{k-1})}}+\dots\Rightarrow e_{k+1}=\frac12\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}e_k\cdot e_{k-1}$$

נניח ש:

$e_k=(\lambda\cdot e_{k-1})^M$

$e_{k+1}=(\lambda\cdot e_k)^M=\lambda^{1+M}\cdot e_{k-1}^{M^2}$

$\lambda^{1+M}\cdot e_{k-1}^{M^2}=\frac12\cdot\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}\cdot\lambda\cdot e_{k-1}^{1+M}\Rightarrow\lambda^M=\frac12\cdot\frac{f''}{f'}\qquad M^2=M+1\Rightarrow\boxed{M=\frac{1+\sqrt5}{2}}$

$$\Rightarrow e_{k+1}=\lambda\cdot e_k^{\frac{1+\sqrt5}{2}}$$

$$\frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^{\frac{1+\sqrt5}{2}}}=\lambda=\frac{|x_{k+1}-\alpha|}{|x_k-\alpha|^{\frac{1+\sqrt5}{2}}}$$

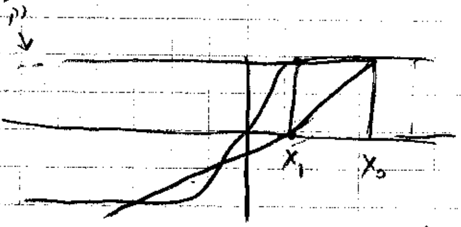
$$\frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p}<c$$

$$|e_{k+1}|<\underbrace{c\cdot|e_k|^{p-1}}_{\text{אם }<1\text{ אז}}\cdot e_k^1$$

נתונו מתכנסים

אם $1>c|e_0|^{p-1}$ אז לכל $k>0$, $c|e_k|^{p-1}<1$ ויש התכנסות.

<u>דוגמא לאי התכנסות</u>



$f=\tanh 5x\quad a=-10\quad b=15$

(*) בהמשך נוכל לשפר את השיטה בדרך כן. (בעמוד הבא) ←

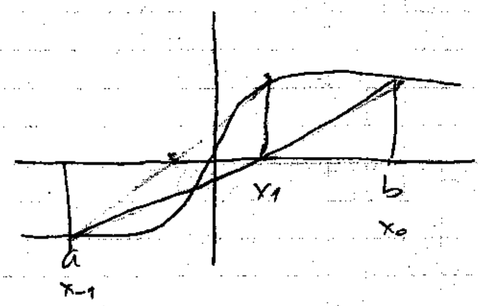
Regula falsi false position

$$q_k = \frac{f(x_k) - f(x_{k'})}{x_k - x_{k'}}$$

כאשר 'k הוא האינדקס המקסימלי כך

$f(x_k)\cdot f(x_{k'}) < 0$

$$(*)\quad x_{k+1} = x_k - f(x_k)\cdot\frac{x_k - x_{k'}}{f(x_k) - f(x_{k'})}$$



מבטיח לנו שתמיד נתפוס

עושה cord ושתחליף סימן עושה secand.
אח"כ שוב cord וכך הלאה..

שיטת ניוטון

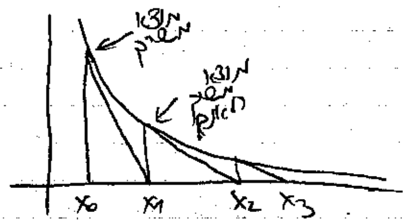
אם ניתן לחשב את f'

$$q_k = f'(\xi) = f'(x_k)$$

$$(1)\quad x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

זה נכון לפי (*)

כי $\frac{x_k - x_{k'}}{f(x_k) - f(x_{k'})}$ זה כמו $\frac{1}{f'(x_k)}$



מוצא $f(x_0)$
ואז לפי הנגזרת
של $f(x_0)$
משיק ומוצא את
החיתוך עם ציר הX.

סדר התכנסות

ניקח את (1) ונחסר α משני הצדדים:

$$x_{k+1} - \alpha = x_k - \alpha - f(x_k)/f'(x_k)$$

$$\left|\frac{x_{k+1} - \alpha}{x_k - \alpha}\right| = \left|1 - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\cdot\frac{1}{(x_k - \alpha)}\right| =$$

מוציא מהמונה $(x_k - \alpha)$ איבר משותף.

פיתוח לפי טור טיילור:

$$= \left|1 - \frac{\cancel{f(\alpha)} + (x_k - \alpha)\cdot f'(\alpha) + \frac{1}{2}\cdot f''(\alpha)\cdot(x_k - \alpha)^2 + \dots}{[f'(\alpha) + (x_k - \alpha)\cdot f''(\alpha) + \frac{1}{2} f'''(\alpha)\cdot(x_k - \alpha)^2 + \dots]}\cdot\frac{1}{\cancel{(x_k - \alpha)}}\right| =$$

מהמכנה מוציא $f'(\alpha)$.

$$= \left|1 - \frac{f'(\alpha) + \frac{1}{2}\cdot f''(\alpha)\cdot(x_k - \alpha) + \dots}{f'(\alpha)\cdot\Big[1 + \underbrace{(x_k - \alpha)\cdot\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)} + \frac{1}{2}\cdot\frac{f'''(\alpha)}{f'(\alpha)}\cdot(x_k - \alpha)^2 + \dots}_{\varepsilon}\Big]}\right| =$$

מניח כי $(x_k - \alpha)$ קטן.

זה כמו $\frac{1}{1+\varepsilon} = 1 - \varepsilon + \varepsilon^2 + \dots$

לפי הפיתוח $\frac{1}{1+\varepsilon}$ זה מה שבסוגריים המרובעים

$$= \left|1 - \frac{1}{f'(\alpha)}\cdot\left[f'(\alpha) + (x_k - \alpha)\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot f'' - f''\right) + o\left((x_k - \alpha)^2\right)\right]\right| =$$

המשך בדף הבא..

לפי זה

$$= \left|1 - \frac{1}{f'(\alpha)}\cdot\left[f'(\alpha) + \frac{1}{2}\cdot(x_k - \alpha) f''(\alpha) + \dots\right]\cdot\left[1 - \left((x_k - \alpha)\cdot\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)} + \frac{1}{2}\cdot\frac{f'''(\alpha)}{f'(\alpha)}\cdot(x_k - \alpha)^2 + \dots\right)\right]\right|$$

כך

$$=|\cancel{1}-1-\frac{f''}{2}\cdot(x_k-\alpha)+o((x-\alpha)^2)|$$

$$\Rightarrow \frac{|x_{k+1}-\alpha|}{|x_k-\alpha|}=\left|\frac{f''}{2f'}\right|\cdot|x_k-\alpha|+O((x-\alpha)^2)$$

$$\Rightarrow \frac{|x_{k+1}-\alpha|}{|x_k-\alpha|^2}=\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}+o((x_k-\alpha))$$

ולכן סדר שני: כי p זה הסדר ופה החזקה במכנה (p) היא 2.

$$\left.\begin{matrix} x_0 & \\ x_1 & x_0 \end{matrix}\right\} x_1 \to x_2 \dots$$

מתי לעצור.

(טולרנס) $|\Delta x| < tol$

$$\delta x \approx \underbrace{k_{abs}}_{}\frac{\delta f}{\delta b}=\frac{1}{f'(\alpha)}\cdot\delta b$$

הערות:

1. הערכה אמינות ל $f'(x)$ min בקטע $[a,b]$.
2. להשתמש ב-rel.
3. פתרון אותה א לכה.. או שמ לא עוקב: $\frac{x_{k+1}-x_k}{x_k}$