29.11.09

1

מד"ר - תרגול 7

אם יש לנו משוואה $ax^2y''+bxy'+cy=g(x)$, אנחנו קוראים לה משוואת אוילר

סדר הנגזרת הגבוהה ביותר שווה לסדר החזקה ביותר של x. (המשוואה לנגזרת מוכפלת ב x: $x^n \cdot y^{(n)}$)

דוגמא:

$$2x^2y''+3xy'-15y=0$$

אנחנו מניחים/מנחשים פתרון מהצורה:

$$y=x^r \Rightarrow y'=rx^{r-1} \; ; \; y''=r(r-1)x^{r-2}$$

נבצע הצבה:

$$2x^2r(r-1)\cancel{x}^{r-2}+3\cancel{x}r\cancel{x}^{r-1}-15\cancel{x}^r=0$$

ונחלק לאחר צמצום x^r:

$$2r(r-1)+3r-15=0$$

$$2r^2+r-15=0$$

$$r_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+120}}{4}=\frac{-1\pm 11}{4} < \begin{matrix} r_1=-3 \\ r_2=\frac{5}{2} \end{matrix}$$

לכן הפתרון:

$$\boxed{y=c_1\cdot x^{-3}+c_2x^{\frac{5}{2}}}$$

אם נתונים תנאי התחלה, נוכל למצוא את c_1 ו- c_2.

דוגמא נוספת:

$$x^2y''+3xy'+4y=0$$

$$r(r-1)+3r+4=0$$

$$r^2+2r+4=(r+1)^2+3=0$$

$$r+1=\pm i\sqrt{3} \Rightarrow r_{1,2}=-1\pm i\sqrt{3}$$

קיבלנו 2 שורשים מרוכבים לכן הפתרון הוא מהצורה:

$$\boxed{y=c_1\cdot x^{-1}\cos(\sqrt{3}\ln x)+c_2x^{-1}\cdot\sin(\sqrt{3}\ln x)}$$

דוגמא 3:

$$x^2y''-xy'+y=x^2$$

המערכת ההומוגנית המתאימה:

$$x^2y''-xy'+y=0$$

נפתור את המשוואה האופיינית:

$$r(r-1)-r+1=r^2-2r+1=0 \Rightarrow r_{1,2}=1$$

קיבלנו 2 שורשים שווים ולכן הפתרונות שלנו יהיו

$$f_1=x \; , \; f_2=x\cdot\ln x$$

לכן, הפתרון הכללי למשוואה ההומוגנית

$$y=c_1x+c_2x\ln x$$

נמצא את הפתרון הפרטי:

$$y_p=u_1\cdot x+u_2\cdot x\cdot\ln x \Rightarrow y_p'=u_1+u_1'x+u_2(\ln x+x\cdot\tfrac{1}{x})+u_2'\cdot x\cdot\ln x$$

נדרוש $u_1'x+u_2'x\ln x=0$ ואז

$$y_p'=u_1+u_2(\ln x+1)$$

$$y_p'' = u_1' + u_2'(\ln x + 1) + u_2 \cdot \frac{1}{x}$$

נציב את הנגזרות במד"ר ונקבל:

$$x^2u_1' + u_2'x^2(\ln x+1) + \underline{u_2 x} - \cancel{x u_1} - \underline{x u_2(\ln x+1)} + \cancel{u_1 x} + \underline{u_2 x\ln x} \ \textcircled{=}$$

$$\textcircled{=} \ x^2u_1' + u_2'x^2(\ln x+1) \underset{\text{מהמד"ר}}{=} x^2$$

נצמצם ב- x^2 ונקבל (בדיוק הדרישה מקודם)

$$\begin{cases} u_1' x + u_2' x\ln x = 0 \\ u_1' + u_2'(\ln x+1) = 1 \end{cases}$$

נחשב את ה-Δ:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & x\ln x \\ 1 & \ln x+1 \end{vmatrix} = x(\ln x+1) - x\ln x = x \neq 0$$

משפט קרמר

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x\ln x \\ 1 & \ln x+1 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{1}{x}(-x\ln x) = -\ln x$$

$$\Rightarrow u_1 = -\int \ln x = -x\ln x + x + c$$

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{x}{x} = 1 \Rightarrow u_2 = x$$

ולכן הפתרון הפרטי:

$$y_p = (-x\ln x + x)x + x\cdot x\ln x = x^2$$

וסה"כ הפתרון הכללי:

$$\boxed{y = c_1 x + c_2 x\ln x + x^2}$$

<u>דרך אחרת</u>

אנחנו מתייחסים ל-x^α כמו שהתייחסנו ל-$e^{\alpha x}$ ומשתמשים בכלל. בתרגול הקודם $\alpha=2$ ולכן
עפ"י הכלל אנחנו מחפשים פתרון מהצורה

$$y_p^* = c\cdot x^2 \Rightarrow y_p^{*\prime} = 2cx \Rightarrow y_p^{*\prime\prime} = 2c$$

נציב ונקבל:

$$\cancel{2cx^2} - \cancel{2cx}\cdot x + cx^2 = x^2 \Rightarrow c = 1$$

ולכן,

$$\boxed{y_p^* = x^2}$$