אלגברה לינארית נומרית

$A \cdot \underline{x} = \underline{b}$

נורמה של וקטור: $\underline{x} \in \mathbb{R}^n \ (\mathbb{C}^n)$

$$\|\underline{x}\| : \mathbb{R}^n \ (\mathbb{C}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\|\underline{x}\| \geq 0 \qquad \|\underline{x}\| = 0 \ \text{iff} \ \underline{x} = \underline{0}$$

$$\|x+y\| \leq \|\underline{x}\| + \|\underline{y}\| \qquad \|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$$

דוגמאות:

$$\|\underline{x}\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_j|$$

נשתמש בנורמה שנוחה לנו.
כל הנורמות במרחב סופי שקולות.

$$\|\underline{x}\|_2 = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|\underline{x}\|_p = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad : p \geq 1$$

$$\|\underline{x}\|_\infty = \max |x_j|$$

נורמות $\|\cdot\|^{(1)}$ $\|\cdot\|^{(2)}$ יקראו שקולות אם קיימים c_1, c_2 כך שלכל x מתקיים:

$$c_1 \cdot \|\underline{x}\|^{(2)} \leq \|\underline{x}\|^{(1)} \leq c_2 \cdot \|\underline{x}\|^{(2)}$$

מעל מרחב ממימד סופי כל הנורמות שקולות!

נורמה של מטריצה

A-מטריצה.

נורמה מושרה:

$$\|A\|_p = \overset{\text{אפשר לעשות sup}}{\max_{\underline{x} \neq 0}} \frac{\|A \cdot \underline{x}\|_p}{\|\underline{x}\|_p} \overset{(*)}{=} \max_{\|\underline{x}\|_p = 1} \|A\underline{x}\|$$

זה כמו המרחב תחת ... כי קומפקטי.

$$(*) \ \frac{\|A \cdot x\| / \|x\|}{\|x\| / \|x\|} = \left\| \frac{1}{\|x\|} \cdot Ax \right\| \leq \left\| A \cdot \underbrace{\frac{x}{\|x\|}}_{y} \right\| \leq \max_{\|y\|=1} \|A \cdot y\|$$

כל הנורמות שלנו שוות לכן: נעבוד לפי מה שנוח לנו.

גישה נוספת: נתייחס אל A כוקטור ממימד $m \times k$ $\quad A^{m \times k}$

וניקח את הנורמה של הוקטור הזה. לדוגמה - נורמה Frobenius

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{k} |a_{j\ell}|^2}$$

נורמה מושרה:

כי $\frac{\|x\|_p}{\|x\|_p} = 1$ לכל x

$$A = I \qquad \|A\|_p = \sup_{x \neq 0} \frac{\|I \cdot \underline{x}\|_p}{\|\underline{x}\|_p} = 1$$

$$\|I\|_F = \sqrt{n} \neq 1$$ לפי נורמת Frobenius

אי שוויונות:

$A^{n \times n}$: $\quad \|A\|_2 \leq \|A\|_F \leq \sqrt{n} \cdot \|A\|_2$

$A^{n \times k}$: $\quad \max_{i,j} |a_{ij}| \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{nk} \max_{i,j} |a_{ij}|$

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq k} \sum_{i=1}^{n} (a_{ij})$$

$$\|A\|_\infty = \max \sum^{k} |a_{ij}|$$

קיים וקטור $\underline{z}$ כך ש: $\mu=\|A\|_2$ $\qquad A^T A\cdot z=\mu^2 z$

קיים רדיוס ספקטרלי של A (לא נורמה) $\rho(A)$.

$$\rho(A)=\max_{j=1..m}|\lambda_j| \qquad \lambda_j \text{ ע"ע של } A.$$

לא נורמה.

$$\Big[\,A\cdot \underset{\text{ו"ע}}{\underline{x}}=\underset{\text{ע"ע}}{\lambda}\cdot \underline{x}\,\Big]$$

דוגמה:

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$$

הערה: מציאת נורמה של מטריצה.

- מציאת $\max\|A\cdot x\|$ כאשר $\|x\|=1$ - נקרא כופלי לגרנז'.

טענה:

$$\|A\|_2=\sqrt{\rho(A^TA)}$$

$$\|A\|_2^2=\max_{\|x\|=1}\langle A\cdot \underline{x},A\cdot\underline{x}\rangle=\max_{\|x\|=1}\langle \underline{x},\underbrace{A^T\cdot A\cdot \underline{x}}_{H}\rangle=$$

לפי תכונות מכפלה פנימית

זוהי מטריצה סימטרית שניתנת ללכסון

$$=\max_j\langle \underline{x},\lambda_j x\rangle=\max|\lambda_j|\underbrace{\langle x,x\rangle}_{1}=\rho - \text{ ע"ע של } A^TA$$

אז $(A^TA)\cdot x=\lambda\cdot x$

$$=\rho(A^TA)$$

כי זוהי מטריצה שכל ע"ע שלה...

לכן הוכחנו.

יש מערכת למצוא את x_0.

$$A\cdot x=b$$
$$A\cdot x_0=b_0$$

בפועל ב-b יש שגיאה. נניח שגיאה ב-b וגם יגרום לשגיאה ב-x:

$$A\cdot(x_0+\Delta x)=b_0+\Delta b$$

השאלה היא מהי השגיאה ב-x? Δx?

נובע מלינאריות $\Delta x=A^{-1}\cdot\Delta b$; $\Rightarrow A^{-1}\cdot b_0=x_0$

לפי ההגדרה של נורמה מושרה:

$$K_{Abs}=\sup_{\Delta b\neq 0}\frac{\|\Delta x\|}{\|\Delta b\|}=\sup_{\Delta b\neq0}\frac{\|A^{-1}\cdot\Delta b\|}{\|\Delta b\|}=\|A^{-1}\|$$

מספר להגדיר את השגיאה האבסולוטית.

נשים לב אם כך k.

דרך הגדרה נוספת לשגיאה:

$$k=\sup_{\Delta b\neq0}\frac{\|\Delta x\|/\|x\|}{\|\Delta b\|/\|b_0\|}=\|A^{-1}\|\cdot\frac{\|b_0\|}{\|x\|}=\|A^{-1}\|\cdot\frac{\|A\cdot x\|}{\|x_0\|}\le\underbrace{\|A^{-1}\|\cdot\|A\|}_{k}$$

התחלף במקומם כי לא תלוי!

אין sup כאן כי הפך שונה ולא שונה למשתנה.

מכאן נובע כי קיבלנו את k (זו הגדרת חסם עליון)

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&\varepsilon\end{pmatrix}\qquad A^{-1}=\begin{pmatrix}1&\\&\frac{1}{\varepsilon}\end{pmatrix}$$

$$K(A)=\|A\|\cdot\|A^{-1}\|\approx1\cdot\frac{1}{\varepsilon}=\frac{1}{\varepsilon}$$

יש פקודה ב-MATLAB - Conditional number

$$\begin{pmatrix}1&\\&\varepsilon\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\\varepsilon\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&\\&\varepsilon\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+\delta_1\\\varepsilon+\delta_2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+\delta_1\\1+\delta_2\end{pmatrix}$$

שגיאה קטנה גורמת לשגיאה קטנה

$A\cdot X_0 = b_0$

$(A+E)\cdot X = b_0$ E - השגיאה ב-A

לפי ההסברה אז ?:

$A\cdot X - b_0 + EX = A\cdot(X-X_0) + E\cdot X = 0$

$(X-X_0) = -A^{-1}\cdot E\cdot X$

$\|X-X_0\| \le \|A^{-1}\|\cdot\|E\|\cdot\|X\|$ לפי $\|A\cdot B\|\le\|A\|\cdot\|B\|$

$\|\Delta X\| \le \|A^{-1}\|\cdot\|E\|\cdot\|X\|$ נחלק ב-$\|X\|$ וגם נכפיל ונחלק בנורמה של A

$$\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|} \le \underbrace{\|A^{-1}\|\cdot\|A\|}_{K(A)}\cdot\frac{\|E\|}{\|A\|}$$

$$\begin{pmatrix}\text{השינוי}\\\text{היחסי}\\\text{בפתרון}\end{pmatrix} \le K(A)\cdot\begin{pmatrix}\text{השינוי היחסי}\\\text{במטריצה}\end{pmatrix}$$

ניתן לחשב לגבול את השינוי בפתרון ובאמצעות השינוי $(A+E)$

(מקודם Δb היתה שווה ל-0)

המקרה הכללי:

$\|E\| << \|A\|$

$\|E\| << \|\frac{1}{A^{-1}}\|$

$\|\Delta b\| << \|b_0\|$

$A\cdot X_0 = b_0$

(*) $(A+E)\cdot X = b_0 + \Delta b$

$A\cdot(X-X_0) + E\cdot X = \Delta b$

$(X-X_0) = -A^{-1}\cdot EX + A^{-1}\cdot\Delta b$

$\|X-X_0\| \le \|A^{-1}\|\cdot\|E\|\cdot\|X\| + \|A^{-1}\|\cdot\|\Delta b\|$

$$\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|} \le \underbrace{\|A^{-1}\|\cdot\|A\|}_{K(A)}\cdot\frac{\|E\|}{\|A\|} + \|A^{-1}\|\cdot\frac{\|\Delta b\|}{\|X\|}$$

שוב נחלק ב-$\|X\|$ ונכפיל ונחלק ב-$\|A\|$ (רק) בימין בלבד.

$\Downarrow$

$$\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|} \le K(A)\frac{\|E\|}{\|A\|} + \|A^{-1}\|\cdot\frac{\|\Delta b\|}{\|(A+E)^{-1}\cdot(b_0+\Delta b)\|} \longleftarrow$$ הצבנו את $\|X\|$ לפי (*)

אחר כך

① $$\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|} \le K(A)\frac{\|E\|}{\|A\|} + \|A^{-1}\|\cdot\|A\|\cdot\frac{\|\Delta b\|}{\|A\cdot(A+E)^{-1}\cdot(b_0+\Delta b)\|}$$

הקדמנו את ה-A בכנס המכנה, ולכן הגדלנו את ה-≤ וזה בגלל $\|AB\|\le\|A\|\cdot\|B\|$ בביטוי ההפוך

$[A\cdot(A+E)^{-1}]^{-1} = (A+E)\cdot A^{-1} = I + E\cdot A^{-1}$

אי שוויון הכפל והחלק ב-$\|A\|$

$$\left\|\frac{1}{A(A+E)^{-1}}\right\| = \left\|\frac{1}{(I+EA^{-1})^{-1}}\right\| \approx \frac{1}{\|I-EA^{-1}\|} \le \frac{1}{1-\|EA^{-1}\|} \le \frac{1}{1-\frac{\|E\|}{\|A\|}K(A)}$$

הפרש קטן

לפי זה רואים כי ניתן... התכונה של הקודם

$$[\underbrace{(I+\varepsilon\cdot M)}_{\text{* מקורי}}\cdot\underbrace{(I-\varepsilon\cdot M)}_{(*)} = I - \underbrace{\varepsilon^2M^2}_{\text{הפרש זניח}}] \Longrightarrow$$

לכן בקירוב (*) הוא ההופכי של (*).

הצבה את זה במקום ב-①

$[\Rightarrow (I+\varepsilon M)^{-1} \approx I - \varepsilon M]$

המשך

$$\Longrightarrow (**)\ \frac{\|\Delta X\|}{\|X\|} \le \frac{K(A)}{1-K(A)\cdot\frac{\|E\|}{\|A\|}}\cdot\left(\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|E\|}{\|A\|}\right)$$

אלימינציה של גאוס: $Ax=b$

שלבים: - החלפה בין שורות.
- מכפלת שורה בקבוע.
- הוספה לשורה קומבינציה לינארית של שורות אחרות.

<u>דוגמה:</u>

$$\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\cdot \underline{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

p=pivot

$$\left(\begin{array}{ccc|c}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\end{array}\right)\underset{R_1\leftrightarrow R_2}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&1\\0&1&1&1\\1&1&0&1\end{array}\right)\underset{R_3\to R_3-R_1}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&1\\0&1&1&1\\0&1&-1&0\end{array}\right)\underset{R_3\to R_3-R_2}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&1\\0&1&1&1\\0&0&-2&-1\end{array}\right)\underset{R_3\to R_3\cdot(-\frac{1}{2})}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&\frac{1}{2}\end{array}\right)\underset{\substack{R_1\to R_1-R_3\\R_2\to R_2-R_3}}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&\frac{1}{2}\\0&1&0&\frac{1}{2}\\0&0&1&\frac{1}{2}\end{array}\right)$$

Block Substitution

כה יש n^3 פעולות בערך, נראה את החישוב ומה הפעולות בקירוב
ונקבל $\frac{2}{3}n^3$. למצוא הסיבוכיות יותר קשה.
מסובך

I. כאשר מאפסים בשורה ה-k-ית:
ⓐ כפל כל השורה ב-$\frac{1}{p}$. $[n-(k-1)+1]\ (x)$ ← מספר פעולות שעושים בכל $\frac{1}{p}$
כי בהתחלה יש אפסים
ⓑ החסרת השורה (מכפלת) כפול האיבר הראשון של כל אחת מהשורות שמתחתיה, מכל השורות הבאות. $(n-k)\cdot[(n-k+1)\cdot(x)+(n-k+1)(+)]$

כעת נסכם את כל השורות: פעולות (x) בסה"כ:

$$\sum_{k=1}^{n-1}[(n-k+2)+(n-k)\cdot(n-k+1)]=\sum_{k=1}^{n-1}[(n-k+1)^2+1]=$$

$$=(n-1)+\left[\frac{(n-1)^3}{3}+\frac{(n-1)}{2}+\frac{(n-1)}{6}\right]-1\simeq\underline{\frac{1}{3}n^3}$$

$(+)$:

$$\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)\cdot(n-k+1)\approx\underline{\frac{1}{3}n^3}$$

ולכן כל הפעולות זה $\frac{2}{3}n^3$.

<u>הצבה לאחור:</u>

לשורה ה-k מתאים: $(n-k)\ (x)+(+)$

$$\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)=\sum_{j=1}^{n-1}j=\frac{n\cdot(n-1)}{2}\simeq\frac{1}{2}n^2\quad (x)+(+)$$

LU Factorization

$A=LU$ עולה n^3. $L=(\Delta)$ משולשית תחתונה, $U=(\nabla)$ משולשית עליונה

אבל הפירוק עולה n^3
אך החישוב זה $O(n^2)$.

$$Ax=b\Rightarrow L\underbrace{Ux}_{y}=b$$

$Ly=b$ n^2 פעולות

$Ux=y$ n^2 פעולות

דוגמא

$$A=\begin{pmatrix}2&1&1&0\\4&3&3&1\\8&7&9&5\\6&7&9&8\end{pmatrix}$$

מטרתנו היא למצוא מטריצה L_1A כך שכל העמודה הראשונה בה תתאפס, מלבד האיבר הראשון.

$$L_1A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-2&1&0&0\\-4&0&1&0\\-3&0&0&1\end{pmatrix} \Rightarrow A=\begin{pmatrix}2&1&1&0\\0&1&1&1\\0&3&5&5\\0&4&6&8\end{pmatrix}$$

אחרי הכפל

כמו השורה הראשונה אותו דבר השורה ה-3 ב-4

השורה ה-2: השורה השנייה פחות כפולה של העמודה הראשונה ב-A.

$$L_2(L_1A)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&-3&1&0\\0&-4&0&1\end{pmatrix} \Rightarrow (L_1A)=\begin{pmatrix}2&1&1&0\\0&1&1&1\\0&0&2&2\\0&0&2&4\end{pmatrix}$$

$$L_3(L_2L_1A)=\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&-1&1\end{pmatrix} \Rightarrow (L_2L_1A)=\underbrace{\begin{pmatrix}2&1&1&0\\0&1&1&1\\0&0&2&2\\0&0&0&2\end{pmatrix}}_{U}$$

$$L_3L_2L_1A=U$$

$$A=(L_3\cdot L_2\cdot L_1)^{-1}\cdot U=\overbrace{L_1^{-1}\cdot L_2^{-2}\cdot L_3^{-3}}^{L}\,\underline{\underline{U}}$$

להפוך מטריצה זו צריך להחליף סימנים

$$L_1^{-1}=\begin{pmatrix}1&&&\\-2&1&&\\-4&&1&\\-3&&&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&&&\\2&1&&\\4&&1&\\3&&&1\end{pmatrix}$$

יש I

יש ב: מכפלה של מטריצה משולשית תחתונה עם אלכסון 1 היא מטריצה משולשית תחתונה עם אלכסון 1.

זה דורש $\sim \frac{2}{3}n^3$ פעולות

$A=LU$

$A x_k = b_k$ n^2 פעולות

לחשב A^{-1} זה לוקח $\frac{5/8}{3}n^3$ או 5 או 8.

$A^{-1}b \leftarrow$ זה לוקח n^2

רק אם יש A^{-1}.