23/4/09

אנליזה נומרית - תרגול 6

חזרה על סוף שיעור שעבר

נורמה מושרית:

$$\|A\| = \sup \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

$(1)\ \|Ax\| \le \|A\|\,\|x\|$

$(2)\ \|AB\| \le \|A\|\,\|B\|$

נוכיח את (1): מהגדרת sup:

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \le \|A\|$$

$$\Rightarrow \|Ax\| \le \|A\|\,\|x\|$$

נוכיח את (2):

$$\|ABx\| \le \|A\|\,\|B\|\,\|x\|$$

$$\|AB\| = \sup \frac{\|ABx\|}{\|x\|} \le \|A\|\,\|B\|$$

אנו מסתכלים על הבעיה $Ax=b$. $x=A^{-1}b$ זו הבעיה ההפוכה

$$A\tilde{x} = A(x+\delta x) = \tilde{b} = (b+\delta b)$$

דוגמא:

$$A = \begin{pmatrix} 100 & 99 \\ 99 & 98 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1.005 \\ 0.995 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} 0.015 \\ -0.005 \end{pmatrix}$$

נבחר הפרעות:

$$\delta b_1 = \begin{pmatrix} 0.001 \\ -0.001 \end{pmatrix}, \quad \delta b_2 = \begin{pmatrix} 0.095 \\ -0.095 \end{pmatrix} \quad \text{(השגיאה)}$$

נבדוק מה יוצא δx

$(\tilde{b} = b+\delta b)$

$$\tilde{b}_1 = \begin{pmatrix} 1.006 \\ 0.994 \end{pmatrix}, \quad \tilde{b}_2 = \begin{pmatrix} 1.1 \\ 0.9 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{x}_1 = \begin{pmatrix} -0.182 \\ 0.194 \end{pmatrix} \Rightarrow \delta x_1 = \begin{pmatrix} -0.197 \\ 0.199 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{x}_2 = \begin{pmatrix} -18.7 \\ 18.9 \end{pmatrix} \Rightarrow \delta x_2 \approx \begin{pmatrix} -18.7 \\ 18.9 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\|\delta b_1\|}{\|b\|} \approx 0.001 \qquad \frac{\|\delta x_1\|}{\|x\|} \approx 13.267$$

$$\frac{\|\delta b_2\|}{\|b\|} \approx 0.1 \qquad \frac{\|\delta x_2\|}{\|x\|} \approx 1260$$

שגיאה קטנה בקלט =>

שגיאה מקרית גבוהה

$$\|\delta x\| = \|A^{-1}\delta b\| \le \|A^{-1}\|\,\|\delta b\|$$

$$\|b\| = \|Ax\| \le \|A\|\,\|x\|$$

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \le \underbrace{\|A^{-1}\|\,\|A\|}_{\mathrm{Cond}(A)} \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

להעשרה!

$$A = \begin{pmatrix} 100 & 99 \\ 99 & 98 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} -98 & 99 \\ 99 & -100 \end{pmatrix}$$

$$\|A\|_\infty = \|A^{-1}\|_\infty = 199$$ (נורמה אינסוף)

$$\mathrm{cond}(A)_\infty \cong 40{,}000$$

condition number גבוה - במובן של יציבות, שגיאות וכו'.

ניתן להראות את הע"ע והוקטורים העצמיים:

$$\lambda_1 = -\frac{1}{200} \qquad V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 \cong 200 \qquad V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(מוצאים את הע"ע ע"י $|\lambda I - A| = 0$)

$$Av = \lambda v$$

נתונה המשוואה וצריך למצוא את x:

$$Ax = \overbrace{0.01V_1 + V_2}\cong V_2$$

$$Av_1 = \lambda_1 v_1 \quad , \quad Av_2 = \lambda_2 v_2$$

ה-x שפותר את המערכת הוא

$$x = \frac{1}{\lambda_1}\cdot 0.001\,V_1 + \frac{1}{\lambda_2}V_2 \;(=)$$

$$Ax = \frac{0.01}{\lambda_1}Av_1 + \frac{1}{\lambda_2}Av_2 = \lambda_1\cdot\frac{1}{\lambda_1}\cdot 0.01V_1 + \lambda_2\cdot\frac{1}{\lambda_2}V_2 = 0.01V_1 + V_2$$

$$(=)\; -200\cdot 0.01V_1 + \frac{1}{200}V_2 \cong -2V_1 + \varepsilon V_2$$

התייחסנו ל- V_1 כשגיאה וקיבלנו שהוא משפיע מאוד על הערך של x.

$$100x + 99y = 1$$

$$99x + 98y = 1$$

$$y = 0.01 - \frac{100}{99}x$$

$$y = 0.0102 - \frac{99}{98}x$$

הבדל (שינוי) קטן ב-y <= הבדל קטן ב-x. (מכלל שהשיפועים קרובים מאוד)

פתרון מערכת משוואות במטלב:

למשל עבור המערכת:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

יש לרשום במטלב:

```
A=[1,2,3; 4,2,1; 1,1,3]
b=[1;1;1]
x=A\b
```

$\longrightarrow$ (להשתמש בחילוק ההפוך)

(לפני השיטה הבאה נלמד למצוא x במטלב)

אלימינציה של גאוס: השלב הראשון הוא שלב Triangulation

(רוצים להגיע למטריצה משולשית עליונה)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[r_3 \leftarrow r_3 - r_1]{r_2 \leftarrow r_2 - 4r_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -6 & -11 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_3 \leftarrow r_3 - \frac{1}{6} r_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -6 & -11 & -3 \\ 0 & 0 & 11/6 & 1/2 \end{array}\right]$$

ובכך סיימנו את השלב הראשון. מכאן יש 2 אפשרויות:

1. להמשיך לכפול (הכפלת השורה השלישית ב- $\frac{6}{11}$ ואיפוס כל שאר העמודה השלישית ע"י חיסור השורה השלישית)

2. הצבה לאחור:

$$\begin{cases} 1x + 2y + 3z = 1 \\ -6y - 11z = -3 \\ \frac{11}{6} z = \frac{1}{2} \Rightarrow z = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{11} = \frac{3}{11} \end{cases}$$

נבדוק כמה פעולות אנו מבצעים בשיטת האלימינציה של גאוס:

בשלב ה- Triangulation מבצעים $O(n^2)$ פעולות (במקרה הכי גרוע פעולה על כל שורה) $O(n^2) \times O(n) = O(n^3)$

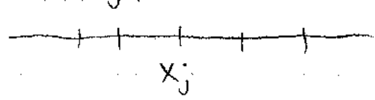
בשלב ה- Bw Sub מבצעים $O(n^2)$

לכן בסה"כ מספר הפעולות: $O(n^2) + O(n^3) = \underline{O(n^3)}$

לדוגמא, אם $n=10^5$ ומעבד שלוקח GH

$10^{3\cdot 5-9} = 10^6 \approx 11d$

בערך 11 ימים (מעבדים 10^9 שבה מהירות המעבד)



$$x_j = jh = j\Delta x$$

$$f'(x_j) \approx \frac{f(x_{j+1}) - f(x_j)}{h} = \frac{f(x_j + \Delta x) - f(x_j)}{\Delta x}$$

$$f''(x_j) = \frac{f(x_{j-1}) - 2f(x_j) + f(x_{j+1})}{h} + O(h^2)$$

$$f''(x) = b(x)$$

$$f(0) = f_0$$

$$f(1) = f_1$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & & \ddots & & \\ & & 1 & -2 & 1 \\ & & & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_{n-1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b(x_1) \\ \vdots \\ b(x_{n-1}) \end{pmatrix} +$$