ריכוז תשובות לשאלות נפוצות בעיבוד אותות

מהו רעש לבן? תן אפיון בציר התדר ובציר הזמן. כיצד ניתן להיפטר מהרעש באות המורכב מסכום של אות דטרמיניסטי ורעש לבן? יש להסביר את הפתרון המוצע בציר הזמן ובציר התדר

רעש לבן הינו אות המכיל בתוכו את כל התדרים באותה המידה. זהו האות הסטוכסטי ביותר הקיים. כלומר, אינו מכיל אף מידע אשר ניתן לחזות מראש. ככזה, הרעש הלבן הינו האות המכיל הכי הרבה אינפורמציה.

בציר התדר, מופיעים ברציפות כל התדרים עם אותה אנרגיה לכולם (ציור?).

בציר הזמן, הסיגנל "משתולל" ולא ניתן לחיזוי. כלומר, גם אם נסתכל עליו אינסוף זמן, לא נוכל לנבא את הערך הבא (**הערה:** חשוב לרשום במפורש כך בחלק של ציר הזמן).

בהינתן אות המורכב מאות דטרמיניסטי ורעש לבן, נוכל להיפטר מהרעש באמצעות Moving Average. כלומר, מיצוע הערכים האחרונים שהתקבלו מהאות. כדי לשפר את המיצוע, נבצע ממוצע משוקלל כך שלערך הנוכחי יהיה משקל גבוה יותר ולערכים אחרים פחות. נשים לב שאת הערך הנוכחי נמקם בקצה החלון (ולא באמצע) כדי שהמסנן יהיה סיבתי. בנוסף, יש לקחת חלון מספיק גדול כדי למזער את הרעש, אך גם מספיק קטן כדי לעקוב אחר השינויים בסיגנל. את פעולה זו ניתן לבצע באמצעות מסנן MA.

בציר הזמן, נקבל ממוצע משוקלל של ערכי הסיגנל וכך נתקרב יותר לערכו האמיתי ללא הרעש.
בציר התדר אופי המסנן הוא LowPass (למה?).

מהי קונבולוציה ספרתית? מה השפעת הקונבולוציה בזמן על ייצוג האות בתדר? מה הקשר בין קונבולוציה למכפלה פשוטה? תנו דוגמאות.

סכום של מכפלות אשר האינדקס של אחד מהגורמים במכפלה עולה והאינדקס השני יורד כך שסכום האינדקסים קבוע.

בציר הזמן נסמן את הקונבולוציה כך $y_n = h * x = \sum_{l=0}^{L} h_l x_{n-l}$. השפעה של קונבולוציה בציר הזמן על ייצוג האות בציר התדר היא מכפלה. כלומר, אם עושים קונבולוציה בין 2 סיגנלים בציר הזמן זה שקול לעשות מכפלה של הייצוג שלהם בציר התדר (זהו גם הקשר בין קונבולוציה למכפלה פשוטה). מכאן, כי אם נהפוך את h ו-x לייצוג בציר התדר (ע"י FT) נקבל את הקשר $Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$.

דוגמאות קונבולוציה:

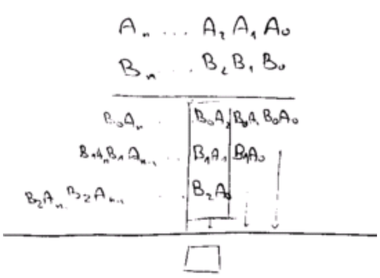
1. ההד שמתקבל במערה הינו מסנן שבכל שלב מחזיר סכום של הצלילים שהושמעו קודם (כאשר כל צליל מוכפל בקבוע מסוים).

2. כפל פולינומים

$$(a_0 + a_1 x)(b_0 + b_1 x + b_2 x^2) = a_0 b_0 + a_0 b_1 x + \dots =$$
$$= (a_0 b_0) + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + (a_0 b_2 + a_1 b_1)x^2 + (a_1 b_2)x^3$$

כל אחד ממקדמי האיברים x^n הינם הקונבולוציה $\sum_{l=0}^{n} a_l b_{n-l}$.

3. חישוב כפל ארוך – אפשר לראות שסכום כל טור מהווים קונבולוציה.



מהו משפט קיבולת הערוץ של שאנון? למה לערוץ ללא מגבלת רוחב סרט יש קיבולת אינסופית? למה לערוץ ללא רעש יש קיבולת אינסופית?

משפט קיבולת הערוץ של שאנון קובע כי לכל ערוץ עם רעש ועם רוחב פס סופי (BW) יש חסם עליון לקצב האינפורמציה שניתן להעביר בו ללא שגיאות בזמן נתון. כאשר יחס האות לרעש הוא SNR הקיבולת הינה: $C=BW\cdot\log_2(SNR+1)$.

בערוץ ללא רעש, נוכל לשדר עליו את כל האינפורמציה הדרושה באות DC בלבד בשיטה הבאה: נרשום את כל האינפורמציה כרצף ביטים ולפניהם נוסיף "0.". קיבלנו שבר בינארי בין 0 ל-1. נשדר על הערוץ את האות $X_n=0.10101010...$ זהו אות DC ולכן יעבור בכל ערוץ (אפילו ערוץ המוגבל מבחינת רוחב פס). כיוון שאין בערוץ רעש, נוכל למדוד במדויק את אות הDC, להוריד את התחילית "0." ולקבל את האינפורמציה ללא שגיאות. זמן השידור שואף ל-0 ולכן הקצב הוא אינסופי.

בהינתן ערוץ ללא מגבלות רוחב פס ובעל רעש לכל היותר N, נבחר אמפילטודות עבור 1 ו-0 שהמרחק ביניהן יהיה גדול מ-N. בשידור ביט בודד, הצד המקבל יכול להחליט, ללא טעות, האם הביט ששודר הוא 0 או 1. כיוון שרוחב הסרט הוא אינסופי, ניתן לעבור בין 2 האמפליטודות בקצב גבוהה כרצוננו, ולכן, לשדר מידע בקצב אינסופי.

מהו אות מחזורי? תנו אפיון בציר הזמן ובציר התדר.
מהו אות סטוכסטי? האם אות סטוכסטי יכול להיות מחזורי? הסבר.
מהו אות ללא מרכיב DC? תן אפיון בציר הזמן ובציר התדר.

בציר הזמן, אות מחזורי הינו אות המקיים דטרמיניסטי אשר ניתן לחזות אותו כיוון שהוא חוזר על עצמו כל פרק זמן מוגדר. כלומר $S(t)=S(t+T)$ עבור T כלשהו הגדול מ-0 (לאותות אנלוגיים) ו$S_n=S_{n+N}$ עבור N כלשהו הגדול מ-0 (לאותות ספרתיים). T וN הקטנים ביותר המקיימים זאת (וגדולים מ-0) נקראים המחזור.

בציר התדר, אות הוא מחזורי אם כל התדרים אשר מופיעים בספקטרום של הסיגנל הם כפולות אחד של השני.

אות סטוכסטי הינו אות שלא ניתן לחיזוי. גם אם נצפה באות עד אינסוף זמן, לא נוכל לנבא את הסיגנל. רעש לבן הינו האות הסטוכסטי ביותר. לכן, אות סטוכסטי אינו יכול להיות מחזורי (כי אם הוא היה מחזורי אז היה ניתן לנבא אותו בעתיד – אם היה מחזורי אז באמצעות S(t) היינו יכולים לדעת את S(t+T)).

בציר הזמן, אות ללא מרכיב DC הינו אות שהממוצע שלו הינו 0.
בציר התדר, אות ללא מרכיב DC הינו אות אשר אין בו את תדר 0 (תדר ה-DC).

באיזה תנאים ניתן לייצג אות אנלוגי ע"י $x(t) = A(t) * cos(\phi(t))$? האם הייצוג יחיד? איך מוצאים את המשרעת והפאזה של אות כזה? מהו תדר רגעי ואיך מחשבים אותו?

אות אנלוגי ניתן לייצג בצורה זאת אם אין לו רכיב DC והינו מוגבל סרט.
אין רכיב DC - הממוצע של האות הינו 0 בציר הזמן ובציר התדר בספקטרום שלו אין לא את תדר הDC.
רוחב סרט מוגבל – רוחב הסרט הוא סופי: ההפרש בין התדר הגבוה בספקטרום לתדר הנמוך ביותר (כלומר תדר 0) הינו סופי. כלומר, יש לו תדר מרבי.

הייצוג של האות אינו יחיד כיוון שיש 2 דרגות חופש: האמפליטודה A(t) והפאזה $\phi(t)$. (למה?)

התמרת הילברט מבצעת הזזה של 90 מעלות ומאפשרת לתרגם אות x(t) מהצורה $A(t)*\cos\phi(t)$ לצורה $y(t)=A(t)*\sin\phi(t)$ כאשר A(t) הינה המשרעת (אמפליטודה) ו-$\phi(t)$ הינו פאזה. בנוסף ניתן לחשב את התדר הרגעי. המשרעת: $A(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$ והפאזה: $\phi(t) = artan_4(\frac{y(t)}{x(t)})$. התדר הרגעי הינו נגזרת הפאזה $\omega(t) = \phi'(t)$ (כלומר, כדי לחשב תדר רגעי, יש לחשב את הפאזה ולגזור).

מסנן הוא מערכת לעיבוד אות המקיים 2 תנאים. הסבירו את התנאים. הציגו את משוואת המסנן בתחום הזמן, התדר ובמישור ה-Z. מהי התכונה המאפיינת מסנן בתחום התדר (תכונה המסבירה את השם מסנן)?

מסנן היא מערכת לעיבוד אות ליניארית ואינווריאנטית כלפי הזמן.

ליניארית – הכוונה היא שאם נעביר למסנן חיבור של 2 אותות התוצאה תהיה שווה להפעלת המסנן על כל אחד מהם בנפרד ולאחר מכן ביצוע החיבור. בנוסף, תוצאת המסנן עבור אות המוכפל בסקלאר שווה לתוצאת המסנן על האות כפול הסקלאר. מתמטית, מהליניאריות נובע f(aX(t)+bY(t))=af(X(t))+bf(Y(t)).

בנוסף, מסנן מקיים אינווריאנטיות כלפי הזמן. כלומר, עבור אותו הקלט, תוחזר אותה התשובה מהמסנן ללא תלות בזמן בו מתבצעת הפעלת המסנן על הקלט (אין למסנן "שעון פנימי").

בציר הזמן, משוואת מסנן הכללית ביותר (מסנן מהצורה ARMA) הינה $y_n = \sum_{l=0}^{L-1} a_l x_{n-l} + \sum_{m=1}^{M-1} b_m y_{n-m}$.
בציר התדר, ניתן להגדיר מסנן באופן ח"ע באמצעות התגובה לתדר ע"י $Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$ כאשר $H(\omega)$ הינה התגובה לתדר ו-$X(\omega)$ הינו הקלט.

במישור Z, משוואת המסנן הינה $Y(z) = H(z)X(z)$ כאשר $H(z)$ הינה פונקצית התמסורת: פונקציה רציונאלית שבמונה שלה מופיעים אפסים ובמכנה שלה מופיעים קטבים $H(z) = \frac{A(z)}{B(z)}$.

התכונה המאפיינת מסנן ומסבירה את שמו (בתחום התדר) קובעת כי ממסנן יכולים לצאת רק תדרים אשר נכנסו. לא כל התדרים חייבים לצאת בפלט אך לא יכולים לצאת תדרים שלא נכללו בקלט (כלומר המסנן "מסנן" את התדרים שנכנסו בקלט).

מה הסבוכיות של מכפלה פשוטה? של קונבולוציה? של FFT? איך אפשר להשתמש באלגוריתם הFFT לצורך הורדת הסבוכיות של קונבולוציה ומכפלה פשוטה?

סבוכיות מכפלה פשוטה הינה $O(n^2)$. סבוכיות קונבולוציה הינה $O(n^3)$. סבוכיות FFT הינה $O(n\log(n))$.
(למצוא תשובה טובה).

את מרחב האותות הספרתיים נהוג לייצג ע"י שני בסיסים. מהם? למה הם בסיסים? איזה ייצוג של אות כללי נובע מכל בסיס? איך עוברים בין 2 הייצוגים?

מרחב האותות הספרתיים נהוג לייצג ע"י SUI ובסיס הסינוסודלים.

<u>הלמים מוזזים</u> (SUI) – מוגדר בציר הזמן, מיוצג ע"י הדלתות של קרונקל כך ש-δ^i שווה ל-0 בכל מקום פרט לזמן i (ובו היא שווה ל-1). זהו בסיס כיוון שהוא פורש את המרחב: כל סיגנל ספרתי ניתן לייצוג ע"י האברים בבסיס המוכפלים בסקלר מתאים (ניתן לרשום דוגמה). כל אחד מאיברי הבסיס הוא בלתי תלוי באחרים כיוון שעבור זמן n כלשהו רק δ^n בעל ערך 1 והשאר בעלי ערך 0 ולכן רק המקדם שלו הוא זה שמשפיע על ערך האות בזמן n.

<u>סינוסידלים</u> – מוגדר על ציר התדר. מיוצג ע"י סכום של קוסינוסים וסינוסים בעלי תדרים שונים. זהו בסיס כיוון שהוא פורש את כל המרחב: באמצעות משפט פורייה ניתן לפרק כל פונקציה מחזורית לסכום של סינוסים וקוסינוסים. ע"י התמרת פורייה ניתן להתייחס לפונקציה שאינה מחזורית כפונקציה בעלות מחזור אינסופי ולפרק אותה לסכום אינסופי של סינוסים וקוסינוסים. לכן, קבוצת הסינוסים והקוסינוסים פורשת את המרחב. בנוסף, מכפלה של 2 סינוסים בעלי תדרים שונים שווה ל-0 ולכן איברי הבסיס אורתוגונאליים אחד לשני ומכאן שהם בלתי תלויים.

ייצוג באמצעות הלמים מוזזים הינו ייצוג בציר הזמן וייצוג באמצעות סינוסידלים הינו ייצור בציר התדר.

כדי לעבור מייצוג בציר הזמן לייצוג בציר התדר, נשתמש בהתמרת פורייה הבדידה (DFT). כדי לעבור מציר התדר לציר הזמן נשתמש בהיפוך התמרת פורייה הבדידה (iDFT).

מהו מסנן? מהו מסנן FIR ומהו מסנן IIR? פרט לפרמטרים הבסיסיים a_l ו-b_m ישנם כמה אופנים לקבוע מסנן בצורה חד ערכית. הסבירו 2 שיטות שונות. אך עוברים משיטה אחת לשנייה ואיך עוברים חזרה לפרמטרים a_l ו-b_m?

מסנן הינו מערכת לעיבוד אותות אשר מקיימת ליניאריות ואינווריאנטיות כלפי הזמן. כלומר, המערכת מקיימת $f(aX_n+bY_n)=af(X_n)+bf(Y_n)$ (ליניאריות). בנוסף, עבור אותו קלט, תחזיר המערכת את אותו הפלט בלי תלות בזמן (אין למערכת "שעון פנימי"). בפלט של מסנן מוחזרים בציר התדר רק תדרים אשר התקבלו בקלט (אך לא בהכרח את כולם).

FIR הינו מסנן אשר בתגובה להלם חוזר לאחר זמן סופי להיות 0. כל מסנן שהינו FIR הוא מסנן MA ולהפך.
IIR הינו מסנן אשר בתגובה להלם אף פעם אינו חוזר להיות 0. כל מסנן IIR הוא מסנן AR או מסנן ARMA.

שיטות לקבוע מסנן בצורה חד ערכית הינם: הפרמטרים הבסיסיים (a_l,b_m), תגובה להלם, תגובה לתדר, פונקצית תמסורת ודיאגראמת קטבים ואפסים.

פונקצית התמסורת – בשיטה זו אנו מבצעים התמרת Z לקלט X ולפלט Y (הפעלת טרנספורם Z על משוואת התגובה להלם). כתוצאה מההתמרה, אנו מקבלים כי Y(z)=H(z)X(z). כאשר H(z) היא פונקציה רציונאלית. כלומר, נוכל להגדיר $H(z) = \frac{A(z)}{B(z)}$.

דיאגראמת קטבים ואפסים – ניתן לייצג מסנן ע"י מכפלה של אפסי המסנן המוכפלים בהגבר הכללי חלקי מכפלת קטבי המסנן. כלומר, $Y(z) = G\frac{\pi(z-\omega)}{\pi(z-\phi)}X(z)$ (*).

מהמשפט הבסיסי באלגברה ניתן לייצג כל פולינום כמכפלה של השורשים שלו. לכן, כדי לעבור מפונקצית התמסורת לדיאגראמת אפסים, נייצג את פונקצית התמסורת כפונקציה רציונאלית, נפרק כל אחד מהפולינומים (במונה ובמכנה) ע"פ המשפט הבסיס (עם ההגבר בנפרד). שורשי הפולינום במונה הם האפסים ושורשי הפולינום במכנה הם הקטבים. נסמן את השורשים והקטבים במישור המורכב. כדי לחזור לפונקצית התמסורת, נייצג את האפסים ω כפולינום מהצורה $\pi(z-\omega)$ מוכפלים בהגבר חלקי מכפלת הקטבים ϕ.

כדי לחזור לייצוג a_l ו-b_m נגיע לייצוג (*) כפי שהוסבר לעיל, נפתח את המכפלות שבמונה ובמכנה. המקדמים של המשתנים בפולינום במונה המוכפלים בהגבר, מהווים את ערכי a_l והמקדמים של המשתנים בפולינום שבמכנה מהווים ערכי b_m.

איזה סבוכיות חישוב חייבת לאפיין אלגוריתם זמן-אמת? הסבר.
מה הסבוכיות של ה-DFT? הסבר. מה הסבוכיות של הFFT?

אלגוריתם זמן אמת מחולק ל-2 סוגים: זמן אמת קשיח וזמן אמת רך. זמן אמת קשיח מחייב סיום ביצוע החישובים עבור דגימה מסוימת, לפני ביצוע הדגימה הבאה. לכן, סבוכיות החישוב של אלגוריתם זה תהיה ליניארית. זמן אמת רך מחייב ביצוע חישובים תוך זמן ליניארי באופן ממוצע. כלומר, בזמן אמת רק עבור חלק מהדגימות ייקח זמן רב יותר לחשב ועבור חלק אחר זמן מופחת כך שהממוצע יהיה זמן חישוב ליניארי. סבוכיות זמן ליניארית מבטיחה לנו שאם יש לנו רכיב המעבד n דגימות בזמן T, מובטח לנו שנוכל לבנות רכיב שמעבד 2n דגימות בזמן של לא יותר מ- 2T וכו' (זמן העיבוד פרופורציונאלי לגודל הקלט). (במעבד DSP חשוב שכל פעולה תיקח זמן קבוע לכן נמנעים משימוש ב- cache).

סבוכיות DFT הינה סבוכיות של $O(n^2)$ (בטוח? למהַ?).

סבוכיות FFT הינה O(nlogn). זאת כיוון, שאלגוריתם FFT עושה שימוש בדסימציה כדי להקל על החישובים ובנוסף זוכר חישובים כדי לעשות בהם שימוש אחר כך. סבוכיות זו אומנם איננה O(n) אבל היא מספיק קרובה לכך שתוכל להיחשב בפרקטיקה כסבוכיות זמן אמת כיוון שצריך קלט גדול מאוד כדי לשבור את החסם.

למה במעבד DSP הזיכרון מחולק לבנקים? מה עוד צריך להוסיף כדי שבנקים אלו ימלאו את ייעודם? מה הקשר בין הבנקים לבין ארכיטקטורת Harvard?

במעבד DSP קיימים 2 בנקים של זיכרון כדי לאפשר ביצוע בו זמני של 2 פעולות Load. כדי לאפשר זאת, יש צורך להוסיף למעבד גם 2 Busים (לא ניתן להשתמש באותו ה-Bus). כל Bus יחבר בין המעבד לבנק זיכרון נפרד. על המעבד לדאוג שכל אחד מהנתונים להם צריך לבצע Load יהיה בבנק שונה.

הקשר בין הבנקים לארכיטקטורה הינו בכך שארכיטקטורת Harvard גם כוללת 2 בנקים. במקור, ארכיטקטורת Harvard כללה בנק זיכרון עבור מערכת ההפעלה (התוכנית) ובנק עבור זיכרון הנתונים (קריאה וכתיבה). כך, לא ניתן היה "לדרוס" פקודות של מערכת ההפעלה (זיכרון לקריאה בלבד), אך מערכת ההפעלה גם לא יכלה ללמוד משגיאות ולהשתנות בהתאם. מעבדי DSP בנויים בארכיטקטורה Harvard מורחבת.

(להשלים שאלה מעשית 5 בשנת 2009 מועד 2א)

באילו 2 תנאים ניתן לפתור את בעיית זיהוי המערכת? נמק. מה זה אומר על המערכת? למה הבעיה הקשה של זיהוי המערכת קשה יותר מהבעיה הקלה? מתי הפיתרון אפשרי?

ניתן לפתור את בעיית זיהוי המערכת כאשר המערכת הינה ליניארית ואינווריאנטית כלפי הזמן. כלומר, המערכת מקיימת $f(aX_n+bY_n)=af(X_n)+bf(Y_n)$ (ליניאריות). בנוסף, עבור אותו קלט, תחזיר המערכת את אותו הפלט בלי תלות בזמן (אין למערכת "שעון פנימי").

אם המערכת לא הייתה אינווריאנטית כלפי הזמן, היינו יכולים לבצע את הבדיקות, ולאחר הגעה למסקנות, ייתכן וה"שעון הפנימי" של המערכת היה משנה את תגובת המערכת לאותות שונים. כלומר, לא היינו מקבלים מסקנות נכונות.

אם המערכת לא הייתה ליניארית, ייתכן והיו בה ערכים ספציפיים בהם הייתה מקבלת המערכת ערכי קיצון. כיוון שמספר הקלטים האפשריים הינו אינסופי, לא היינו יכולים להגיע למסקנות נכונות כלפי תגובת המערכת.

בקיום שני תנאים אלו הרי שהמערכת הינה מסנן. כלומר ניתן לפתור את בעיית זיהוי המערכת רק עבור מסננים.

בבעיה הקלה של זיהוי אנו יכולים לקבוע מה הקלט ולצפות מה מוחזר כפלט. בבעיה הקשה, לא ניתן לשלוט בקלט אך ניתן לראות מה הקלט ומה הפלט.

הבעיה "הקשה" קשה יותר כיוון שאין לנו שליטה על הקלטים ולכן ייתכן שהקלט יכיל רק אפסים. במקרה כזה, לא ניתן לפתור את הבעיה. ניתן לפתור את הבעיה רק כאשר יש רצף מספיק ארוך ללא אפסים. כלומר, צריך להיות מספיק דגימות השונות מ-0 ברצף כדי שנוכל לפתור את בעיית זיהוי המערכת. בנוסף, צריך לדעת מה סוג המסנן ואת מספר המקדמים.

מה הם שלושת משפטי שאנון? איזה תכונות יש לכל ערוץ פיזיקאלי? למה תכונות אלו מגבילות את קיבולת הערוץ?

משפטי שאנון הינם:

משפט ההפרדה – כל מערכת תקשורת (מערכת המעבירה אינפורמציה ממקום אחד למקום אחר) היא אופטימאלית אם בונים אותה ע"י מקודד מקור ובצד השני מפענח מקור, מקודד ערוץ ומפענח ערוץ.

משפט מקודד המקור – מדבר על "כמה טוב" יכול להיות מקודד/מפענח מקור. המשפט טוען כי קיים מקודד מקור ומפענח כך שניתן לקודד כל אינפורמציה במספר ביטים מינימאלי. עם זאת, שאנון אינו מסביר כיצד לבנות מקודד/מפענח שכזה. (סימונשירה: האם אנחנו יודעים גם כמה ביטים?)

משפט קיבולת הערוץ – משפט קיבולת הערוץ של שאנון קובע כי לכל ערוץ עם רעש ועם רוחב פס סופי (BW) יש חסם עליון לקצב האינפורמציה שניתן להעביר בו ללא שגיאות בזמן נתון. כאשר יחס האות לרעש הוא SNR הקיבולת הינה: $C=BW \cdot \log_2(SNR+1)$. הוכחה לכך מסתמכת על 2 למות: לערוץ ללא רעש יש קיבולת אינסופית. לערוץ עם רוחב פס אינסופי יש קיבולת אינסופית.

כל ערוץ פיזיקאלי מכיל רעש ומעוות אותות (עיוות האות נגרם כיוון שהערוץ מתנהג כמו מסנן אשר מעביר פחות טוב תדרים גבוהים – כלומר מספר התדרים שהערוץ מעביר טוב הוא מוגבל). לכן, ע"פ משפט קיבולת הערוץ של שאנון, בכל ערוץ פיזיקאלי, כמות האינפורמציה שניתן להעביר ללא שגיאות הינה כמות סופית.

מהי בעיית זיהוי מערכת? לאיזה סוג של מערכת היא ניתנת לפתרון? (הסבר!) איך קוראים למערכת המשוואות המתקבלת למקרה ה-MA וה-AR?

בעיית זיהוי המערכת היא: בהינתן מערכת לעיבוד אותות, נרצה לדעת מה פלט המערכת עבור כל קלט.

בעיה זו ניתנת לפתרון רק עבור מסננים, כיוון ש:

- המערכת צריכה להיות לינארית, כלומר לקיים $f(ax_1+bx_2)=af(x_1)+bf(x_2)$. אם נקח לדוגמא מערכת שאינה לינארית, כמו $f(x_n)=\begin{cases}256, x_n=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\\ x_n, o/w\end{cases}$, אז עבור כל אות פרט ל-$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ נקבל את האות עצמו, וניתן לחשוב שהמערכת היא מערכת הזהות, אך מסקנה זו שגויה.

- המערכת צריכה להיות אינווֹ' בזמן, כלומר אם $f(x_n)=y_n$ אז $f(x_{n+k})=y_{n+k}$. אם נקח לדוגמא מערכת שאינה אינוו' כלפי הזמן, כמו $f(x_n)=\begin{cases}x_n, n\le 100\\ 0, o\backslash w\end{cases}$, אז אם נעקוב אחר המערכת עד זמן 100, נחשוב שהמערכת היא מערכת הזהות, אך מסקנה זו שגויה.

הבעיה (עבור מסננים) מתחלקת לשני סוגים:

- הבעיה הקלה: ניתן להכניס למערכת איזה קלט שנרצה ולצפות בפלט שלו. במצב זה ניתן לגלות את המערכת באמצעות בדיקת תגובה להלם (הכנסת UI ובדיקת הפלט בציר הזמן) או תגובה לתדר (הכנסת סינוס ובדיקת הפלט בציר התדר).

- הבעיה הקשה: נתונה מערכת וקלטים נתונים וניתן לצפות בפלט עליהם (כלומר לא ניתן לבחור את הקלטים שיוכנסו למערכת). בעיה זו ניתנת לפתרון ע"י משוואות, כפי שיפורט בהמשך.

המשוואות לפתרון הבעיה הקשה הם Wiener-Hopf עבור מסנן MA, ו-Yule-Walker עבור מסנן AR.

מהי הסבוכיות של אלגוריתם ה-FFT? הגדר דסימציה וחלוקה והבחן ביניהם. מה הקשר בין דסימציה בזמן לחלוקה בתדר, ואיך זה קשור ל-FFT?

סבוכיות אלגוריתם ה-FFT היא $O(n\log n)$, וסיבוכיות זו אמנם אינה לינארית, אך מספיק טובה לשימוש במערכות זמן אמת (כל עוד ה-N לא גדול מדי).

דסימציה היא חלוקה של סדרה לסירוגין לפי ה-LSB של אינדקס איברי הסדרה, כלומר לזוגיים ולאי זוגיים. ניתן לבצע את הדסימציה באיטרציות, כאשר בכל שלב מבצעים דסימציה על כל אחד מקטעי החלוקה לפי האיטרציה הקודמת. התהליך המתבצע הוא למעשה shift left מעגלי כאשר בכל איטרציה מקפיאים עוד ועוד מה-LSB (באיטרציה השנייה נקפיא את ה-LSB הראשון, באיטרציה השלישית גם את השני וכן הלאה). לבסוף נקבל bit-reversal על האינדקסים של הסדרה.

חלוקה היא חלוקת סדרה באמצע כך שבחצי הראשון נמצאים $\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$ האיברים הראשונים ובחצי השני $\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$ האיברים האחרונים, כלומר לפי ה-MSB של אינדקס איברי הסדרה. החלוקה תתבצע באיטרציות, כאשר בכל שלב מבצעים חלוקה על כל אחד מקטעי הסדרה לפי החלוקה באיטרציה הקודמת.

הקשר בין דסימציה בזמן לחלוקה בציר התדר: דסימציה בציר הזמן היא חלוקה בציר התדר. אם אות מיוצג ע"י $x_0, \dots, x_{2n}$ בציר הזמן וע"י $X_0, \dots, X_{2n}$ בציר התדר, ונבצע דסימציה בזמן, ונקח למשל רק את $x_0, x_2, \dots, x_{2n}$ (האינדקסים הזוגיים), אז האות המיוצג ע"י איברים אלו בציר הזמן, יהיה מיוצג ע"י האיברים המתקבלים מחלוקה בציר התדר, כלומר $X_0, \dots, X_n$, וזה נובע ממשפט הדגימה של Nyquist. (**למה?**)

הקשר לאלגוריתם ה-FFT: אלגוריתם ה-FFT ניתן בשני אופנים: DIT – דסימציה בזמן, או DIF – דסימציה בתדר, שהיא חלוקה בזמן. האלגוריתם חוסך חישוב מכפלות ע"י שימוש בחישוב שנעשה באיטרציות קודמות:

- דסימציה בזמן: $X_k = X^E + W_N^k X^O$, $X_{k+\frac{N}{2}} = X^E - W_N^k X^O$.
- חלוקה בזמן: אם נחשב את $X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n W_N^{nk}$ נוכל לחשב גם את $X_{k+\frac{N}{2}}$ שהוא אותו ערך רק עם $(-1)^n$ בתוך הסכום.

נשים לב שכאשר אנו מבצעים DIT (דסימציה בזמן), החיבורים שאנו מבצעים בין 2 חלקים שחישבנו בנפרד יהיו מ-2 חלוקות שונות. (האם יש קשר חד יותר?).

הסבירו את ההבדל בין ארכיטקטורת Harvard לבין ארכיטקטורת von Neumann. באיזה משתמשים מעבדי DSP ולמה?

ארכיטקטורת Harvard: יש שני זיכרונות כאשר אחד הוא לקריאה בלבד עבור התוכנית (מע' ההפעלה) – Program memory, והשני לקריאה/כתיבה עבור נתונים – Data memory. למעבד יש גישה לשני הזיכרונות.
ארכיטקטורת von Neumann: בעלת זיכרון אחד בו יושבת גם התוכנית וגם הנתונים בהם התוכנית משתמשת בזמן ריצה.

מעבדי DSP משתמשים בארכיטקטורת Harvard, כיוון שארכיטקטורה זו מאפשרת גישה לפקודה הבאה בתוכנית ולנתונים במקביל, כחלק מהורדת זמן הריצה של פעולת MAC לטיק שעון בודד (ליתר דיוק נעשה שימוש בארכיטקטורת Harvard מורחבת המשתמשת בשני זיכרונות Data כדי לאפשר גישה במקביל לשני נתונים לפעולת ה-MAC ולפקודה הבאה).

כמו כן, יישומים שרצים על מעבדי DSP אינם משנים את התוכנית בזמן הריצה, ולכן אין צורך שזיכרון התוכנית ישב בזיכרון בו יש אפשרות כתיבה תוך כדי ריצה.

מהם המודלים הבסיסיים לחילול ושמיעת דיבור? האם המודלים מתאימים אחד לשני?

המודל הבסיסי לחילול דיבור הוא מודל ה-LPC – Linear Predictive Code. למנגנון זה שני חלקים מחוללים שאחד מחולל pitch – קולי, והשני מחולל רעש לבן – לא קולי. למודל מתג הבורר ביניהם, ולאחריו יש מגבר (Gain). לבסוף האות נכנס למסנן all-pole (AR), שהוא חלל הפה והשיניים. התדרים שנכנסים למסנן נקראים formants. לא ניתן לבטל תדרים (לאפס) אלא רק להגביר. בצרפתית המסנן הינו ARMA ובו כן ניתן לאפס תדרים.

המודל הבסיסי לשמיעת דיבור הוא מודל וובר המתבסס על העקרון לפיו רוב החושים של האדם, בפרט חוש השמיעה, אינם אבסולוטיים אלא יחסיים: עליה במידת שינוי אחת, JND, בעולם הפסיכולוגי (תפיסת האדם) שווה להכפלת העוצמה בעולם הפיסיקלי (כלומר סקאלת החוש היא לוגריתמית ביחס לשינוי הפיסיקלי). קבוע ההכפלה בעולם הפיסיקלי המתאים ל-JND אחד בעולם הפסיכולוגי נקרא קבוע פכנר, ועבור חוש השמיעה הוא 2, כלומר: לכל העלאה באוקטאבה אחת, התדר מוכפל פי 2. חוק פכנר תקף גם לגבי עוצמה. (מספיק?)

בדר"כ משדר זו הפונקציה ההפוכה של המקלט. עם זאת, מערכות אלו בגוף האדם לא מתאימות זו לזו (במקור, המערכת המכוללת דיבור לא נועדה לכילול דיבור וכנ"ל לגבי מערכת השמיעה). לכן, אנו מוגבלים בקצת העברת האינפורמציה.

לאופרטור ההשהיה בזמן קוראים z^{-1}. הוכיחו את הקשר בינו לבין טרנספורם Z.

טרנספורם Z מוגדר כך: $S(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} s_n z^{-n}$. נניח $y=\hat{z}^{-1}s$:

$$S(\hat{z}^{-1}s)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{z}^{-1}s_n z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}s_{n-1}z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}s_{n-1}z^{-n+1}\cdot\underbrace{z^{-1}}_{\text{קבוע}}=$$
$$z^{-1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}s_{n-1}z^{-(n-1)}\underset{\text{הזזת אינדקסים}}{=}z^{-1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}s_n z^{-n}=z^{-1}S(s)$$

ומכאן קיבלנו כי $\mathrm{S}(\hat{\mathrm{z}}^{-1}\mathrm{s})=\mathrm{z}^{-1}\mathrm{S}(\mathrm{s})$.

הראו המערכת $y_n=x_{n-1}+x_{n+1}$ הינו מסנן. מהו ההגבר של מסנן זה ב-DC? מהו ההגבר בתדר Nyquist? מהי תגובתו להלם ומהי תגובתו לתדר?

נוכיח שהמערכת היא מסנן ע"י הוכחת ליניאריות ואינווריאנטיות כלפי הזמן. נסמן את המערכת כ-f, ומתקיים: $\mathrm{f}=\hat{\mathrm{z}}^{-1}+\hat{\mathrm{z}}$:

- $f(ax_n+by_n)=(\hat{z}^{-1}+\hat{z})(ax_n+by_n)=ax_{n-1}+by_{n-1}+ax_{n+1}+by_{n+1}=af(x_n)+bf(y_n)$ – מכאן המערכת ליניארית.
- $f(x_n)=y_n$, נבדוק את $f(x_{n+k})$: $f(x_{n+k})=x_{n+k-1}+x_{n+k+1}=y_{n+k}$ – מכאן שהמערכת אינוו' כלפי הזמן.

נסתכל על אות DC: ...1,1,1,1,1: $y_1=1+1=2; y_2=1+1=2; \ldots$ - מכאן שההגבר על אות DC הוא 2.

נסתכל על אות Nyquist: ...1,-1,1,-1,1: $y_1=1+1=2; y_2=-1-1=-2,\ldots$ - מכאן שההגבר על אות Nyquist הוא -2, כלומר הוא מהפך ומגביר פי 2.

תגובה להלם: $y_0=0+0=0; y_1=1+0=1; y_2=0+0=0;\ldots$ - רק עבור זמן $n=1\ or\ n=-1$ הפלט הוא 1, בכל השאר הוא 0.

תגובה לתדר:
אם נכניס למערכת $\sin(\omega n)$ נקבל: $f(A\sin(\omega n))=A\sin(\omega n-\omega)+A\sin(\omega n+\omega)\ =\ 2A\sin(\omega n)\cos(\omega)$.
מכאן שהפאזה לא משתנה והאמפליטודה היא $2\cos\omega$.

גוזר הינו מערכת לעיבוד אותות המוציא פלט שהוא הנגזרת של הקלט. להוכיח שהגוזר הוא מסנן. מהי תגובתו לתדר (אמפליטודה ופאזה)?

תהי f פונקצית הגוזר, כלומר $f(x(t))=x'(t)$. נראה שהגוזר הוא ליניארי ואינוו' בזמן, ולכן מסנן:

- ליניאריות: $f(ax(t)+by(t))=(ax(t)+by(t))'=ax'(t)+by'(t)=af(x)+bf(y)$.
- אינוו' כלפי הזמן: נראה כי אם $f(x(t))=x'(t)$ אז $f(x(t+T))=x'(t+T)$:
$$f(x(t+T))=(x(t+T))'\underset{\text{כלל השרשרת}}{=}\underbrace{(t+T)'}_{=1}\cdot x'(t+T)=x'(t+T).$$

הנ"ל נובע ישירות גם מתכונות הנגזרת.

התגובה לתדר:

$f[\sin(\omega t)]=(\mathrm{si}$

ומכאן שהאמפליטודה מוכפלת ב-ω והפאזה זזה ב-$\frac{\pi}{2}$.

האות הספרתי $s_n = Ae^{\lambda n}$ הינו אות עצמי של אופרטור הקידום בזמן. מצאו את הערך העצמי. האות הסינוסודלי $A\ sin\ \omega n$ הינו אות עצמי של האופרטור $\alpha z^{-1} + \beta z^{-2}$. מצאו את המקדמים α, β.

מערכת אופרטור הקידום בזמן: $f(x_n) = \hat{z}^{-1} x_n$. אם $Ae^{\lambda n}$ הוא אות עצמי אז מתקיים:
$f\left(Ae^{\lambda n}\right) = \hat{z}^{-1}A$
מכאן ש-e^{λ} הוא ערך עצמי.

אם $A \sin \omega n$ הוא אות עצמי של האופרטור $\alpha\hat{z}^{-1} + \beta\hat{z}^{-2}$, נמצא את המקדמים α, β (משום מה מניחים כי הערך העצמי הוא 1 ומפתחים לפי זה את המשוואות, לא ברור למה אבל זה עובד):

$$A \sin \omega n = (\alpha\hat{z}^{-1} + \beta\hat{z}^{-2})(A \sin \omega n) = \alpha A \sin \omega (n-1) + \beta A \sin \omega (n-2)$$
$$\Rightarrow \quad divide\ by\ A, change\ all\ n\ to\ n+1$$
$$\sin(\omega n + \omega) = \alpha \sin(\omega n) + \beta \sin(\omega n - \omega) \Rightarrow$$
$$\sin \omega n \cdot \cos \omega + \cos \omega n \cdot \sin \omega = \alpha \sin \omega n + \beta \sin \omega n \cdot \cos \omega - \beta \cos \omega n \sin \omega \Rightarrow$$
$$\sin \omega n\, [\cos \omega] + \cos \omega n\, [\sin \omega] = \sin \omega n\, [\alpha + \beta \cos \omega] + \cos \omega n\, [-\beta \sin \omega] \Rightarrow$$
$$\begin{cases} \cos \omega = \alpha + \beta \cos \omega \\ \sin \omega = -\beta \sin \omega \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \cos \omega \\ \beta = -1 \end{cases}$$

לאות x יש אנרגיה E. מהי האנרגיה של האות ax? אות x, y הם סינוסוידליים בעלי אותה אנרגיה. מה אפשר להגיד על אנרגית הסכום $x + y$?

תחילה נחשב את האנרגיה של האות ax: $E(ax) = a^2 E(x) = a^2 E$.
כיוון ש-x, y הם סינוסוידליים בעלי אותה אנרגיה (נסמנה E), אז האמפליטודה שלהם זהה, התדר זהה אך הפאזה יכולה להיות שונה. במקרי הקיצון הפאזה תהיה בהפרש של $180°$, ובמרה קיצון שני הפאזה תהיה זהה. במקרים אלו:

- אם הפאזה זהה $x = y$ ואז: $E(x+y) = E(x+x) = E(2x) = 4E(x) = 4E$.

$$0 \le E(x-y) = \sum (x-y)^2 = E(x) + E(x) - 2\sum(xy)$$
$$-2E(x) \le -2\sum(xy)$$
$$E(x) \ge \sum(xy)$$

- אם הפאזה בהפרש $180°$ אז הם מבטלים אחד את השני והאנרגיה של הסכום היא 0.

לפיכך אנרגיית הסכום תהיה ערך בין 0 ל-$4E$.