אנליזה נומרית שיעור 11

גזירה נומרית

$$f'_{x_0} \approx \sum a_j \cdot f_j \,,\quad f_j = y_j = f(x_j)$$ פיתוח טיילור.

אנחנו מניחים שהנגזרות קיימות.

$$f'_0 = \frac{f_1 - f_{-1}}{2\cdot h} - \frac{1}{6} f'''_0 \cdot h^2 + o(h^2)$$

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a) + \frac{h}{2}\cdot f''(\xi) = f'(a) + \frac{h}{2}\cdot f''(a) + o(h)$$

במחשב:

$$\frac{[f(a+h)+\varepsilon_1]-[f(a)+\varepsilon_2]}{h(1+\varepsilon_3)} = f'(a) + \boxed{\frac{h}{2}\cdot f''(\xi) + \frac{\varepsilon}{h}} \to E$$

מה שאנחנו רוצים.

ε-בסדר גודל של ε_1 ו-ε_2.

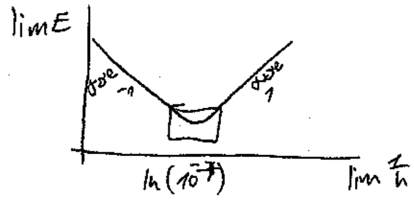
$$\frac{h}{2}\cdot f''(\xi) = \frac{\varepsilon}{h}$$ יש שיוויון בשגיאות כאשר:

$$\Downarrow$$

$$h = \sqrt{\frac{2\cdot\varepsilon}{f''(\xi)}} \approx \sqrt{\varepsilon}$$

השגיאות שוות כאשר $h = \sqrt{\varepsilon}$

נניח! - $\varepsilon \sim 10^{-17} - 10^{-16}$ השגיאה של ε $\Leftarrow$ $\sqrt{\varepsilon} \sim 10^{-7} - 10^{-8}$.



$\frac{1}{h}$ שנותן ערך מינימלי לשגיאה, הוא $\ln(10^{-7})$.

ראינו כשיש שיוויון בין השגיאות כאשר h ו-$\sqrt{\varepsilon}$ באותו סדר גודל (מה יוצא בערך 10^{-7}).

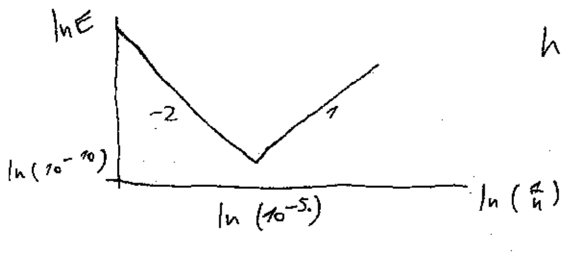
$$\frac{f(a+h)-f(a-h)}{h} = f'(a) - \frac{1}{6}\cdot f''(a)\cdot h^2$$

שיטה נוספת לחישוב נגזרת - משתמשים בנגזרת מסדר גבוה יותר.

$$\frac{[f(a+h)+\varepsilon_1]-[f(a-h)+\varepsilon_2]}{2h\cdot(1+\varepsilon_3)} = f'(a) - \underbrace{\frac{1}{6}f'''(a)\cdot h^2}_{\text{השגיאה של פה היא } h^2} + \frac{\varepsilon}{h}C$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{C\cdot\varepsilon}{f'''(a)}} \sim 10^{-5}$$ כאשר יש שיוויון!

השגיאה המינימלית פה הרבה יותר קטנה!



אינטגרציה נומרית

יציבות:

$$G(f) = \int_a^b f\,dx$$

$$f \to f + \Delta f$$

$$G \to G(f+\Delta f) =: G + dG =$$

$$= \int_a^b f\,dx + \underbrace{\int_a^b (\Delta f)\,dx}_{dG}$$

dG-מספר.
df-פונקציה.

$$K = \underset{(\|\Delta f\|=1)}{\sup}\left\|\frac{dG}{df}\right\| = \left\|\frac{\int_a^b df\,dx}{df}\right\| = \frac{\|\int_a^b df\,dx\|_\infty}{\|\Delta f\|_\infty} \le$$

$$\le \frac{\|\Delta f\|_\infty \int_a^b dx}{\|\Delta f\|_\infty} = \underline{(b-a)}$$

$$f: [a,b] \to \mathbb{R}$$ תכונות נורמה!

ϕ-נורמה.

$$\phi(f) \ge 0 \qquad \phi(f) = 0 \Leftrightarrow f = 0$$

$$\phi(\alpha\cdot f) = |\alpha|\cdot\phi(f)$$

$$\phi(f+g) \le \phi(f) + \phi(g)$$

דוגמה: $p \ge 1$

$$\max_{x\in[a,b]} |f| \qquad \sqrt[p]{\int_a^b (f)^p\,dx}$$

אם $I(f)=\int_a^b f\,dx$ — צריך למצוא נק' x_j משקלים a_j.

$I(f)\approx\sum a_j\cdot f_j$

$f=P_k(x)+e_k=\sum f_j\cdot l_j(x)+f[x_0\dots x_k,x]\cdot w_{k+1}(x)$

נוסחת השגיאה לפי פולינום ניוטון

כש: $w_{k+1}(x)=\prod_{j=0}^{k}(x-x_j)$

אינטגרל

$I(f)=I(P_k)+\underbrace{I(e_k)}_{E}$

אינטגרל ל- $I(P)$:

$I(P)=\int_a^b\sum f_j\cdot l_j(x)=\sum f_j\overbrace{\int_a^b l_j(x)}^{a_j}$

f_j קבוע ויצא מחוץ לאינטגרל

(*) $E=\int_a^b f[x_0\dots x_k,x]\cdot w_{k+1}(x)dx$

I. ל- w_{k+1} יש סימן קבוע.

זוהי פונקציה רציפה. ניתן להוציא את זה החוצה לפי ערך הביניים בנקודה ξ כלשהי.

במשפט ערך הביניים ש"י פונקציה x פונקציה עם סימן קבוע.

$\Rightarrow E=f[x_0\dots x_k,\xi]\cdot\int_a^b w_{k+1}(x)dx=\frac{1}{(k+1)!}\cdot f^{(k+1)}(\eta)\int_a^b w_{k+1}(x)dx$

הוכחנו בשיעור קודם.

$f[x_0\,x]=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

II. $\int_a^b w_{k+1}(x)dx=0$.

נשתמש בזהות:

$f[x_0\dots x_k,x]=f[x_0,\dots x_k\ x_{k+1}]+f[x_0\dots x_k\ x_{k+1},x]\cdot(x-x_{k+1})$

פה חסר x_{k+1} — פה חסר x — זה כי הסדר לא חשוב.

ההפרש ביניהם זה $x-x_{k+1}$ (מה שמימין)

הצבה (*): $E=\cancel{\int_a^b f[x_0\dots x_k\ x]\cdot w_{k+1}(x)dx}+\int_a^b f[x_0\dots x_k\ x_{k+1}\ x]\cdot\underbrace{(x-x_{k+1})\cdot w_{k+1}(x)}_{w_{k+2}(x)}dx$

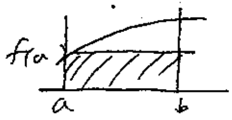
זה יוצא מספר — זה נתון שישווה ל-0.

אם נבחר את x_{k+1} כך ש w_{k+2} בעל סימן קבוע, אז:

$E=\frac{f^{(k+2)}(\eta)}{(k+2)!}\int_a^b w_{k+2}(x)dx$

דוגמאות:

I. $k=0,\quad f(x)=\underbrace{f(x_0)}_{P_0}+\underbrace{f[x_0,x]\cdot(x-x_0)}_{e_0}$



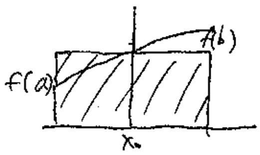
הפכנו את f(a) להיות f(x)

נבחר $x_0=a$.

כלל המלבן Rectangular Rule

$w_1=(x-x_0)=(x-a)\ge 0$

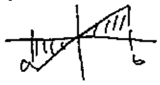
$E=\frac{f'(\eta)}{1!}\int_a^b(x-a)dx=f'(\eta)\cdot\frac{(b-a)^2}{2}$



II. המקרה השני, נבחר $x_0=\frac{b+a}{2}$

$w=(x-\frac{b+a}{2})\Rightarrow\int_a^b w\,dx=0$

Midpoint Rule



כי אם נחשב את האינטגרל פה יצא: כלל המישור $\int_a^b(x-\frac{b+a}{2})dx$

$$E = \int_a^b f[x_0, x]\cdot\left(x - \frac{b+a}{2}\right)\cdot dx = \underbrace{\int_a^b f[x_0, x_1]\cdot\left(x - \frac{b+a}{2}\right) dx}_{=0} +$$

$\boxed{f[x_0, x] = f[x_0\ x_1] + f[x_0\ x_1\ x](x-x_1)}$

$$+ \int_a^b f[x_0\ x_1\ x]\cdot \underbrace{(x-x_1)\cdot\left(x-\frac{b+a}{2}\right)}_{w_2} dx$$ כמו שראינו בפעם הקודמת

בשביל ש- w_2 יהיה סימן קבוע נבחר $x_1 = x_0 = \frac{a+b}{2}$.

$$W_2 = \left(x - \frac{b+a}{2}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow E = \frac{f''(\eta)}{2!}\cdot\int_a^b W_2\, dx = \frac{f''(\eta)}{24}\cdot(b-a)^3$$

מניחים ש- $|b-a|$ קטן, לכן בר II מקבלים הרבה יותר כי השגיאה $(b-a)^3$ קטנה מה-I בו השגיאה $(b-a)^2$.

כמו שעשינו עבור $k=1$: $f(x) = f[x_0] + f[x_0\ x_1]\cdot(x-x_1) + f[x_0\ x_1\ x_2]\cdot w_2(x)$

נבחר $x_0 = a$, $x_1 = b$

Trapezoid Rule

$$\Rightarrow W_2 = (x-a)\cdot(x-b) \leq 0$$

$$I \approx \int_a^b \left(f[a] + f[a\ b]\cdot(x-a)\right) dx = \frac{1}{2}\cdot(b-a)\cdot[f(a)+f(b)]$$

$$E = \int_a^b f[a\ b\ x]\cdot W_2(x)\, dx = \frac{f''(\eta)}{2!}\cdot\int_a^b W_2\, dx = -\frac{f''(\eta)}{12}\cdot(b-a)^3$$

כי $w_2(x)$ שומר סימן קבוע. אז לפי ערך הביניים.

$k=2$: $f(x) = P_2 + f[x_0, x_1, x_2, x]\cdot w_3(x)$

$x_0 = a$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$, $x_2 = b$, $\int w_3 = 0$

Simpson's Rule

$x_3 = x_1 \Rightarrow w_4 \leq 0$ $\quad w_4 = \underbrace{(x-a)\cdot(x-b)}_{\text{שלילי}}\underbrace{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2}_{\text{חיובי}}$ לכן $w_4 \leq 0$

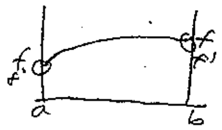
$$E = -\frac{1}{90}\cdot\left(\frac{b-a}{2}\right)^5\cdot f^{(4)}(\eta)$$

$$I \approx \int_a^b P_2\, dx = \frac{b-a}{6}\cdot\left[f(a) + 4\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

קירוב האינטגרל

$k=3$: $f(x) = P_3(x) + f[x_0 \dots x_3\ x]\cdot w_4$

$x_0 = x_1 = a$, $x_2 = x_3 = b$



$$w_4 = (x-a)^2\cdot(x-b)^2$$

$$E = f^{(4)}(\eta)\cdot\frac{(b-a)^5}{720}$$

$$\int P_3 = \left(\frac{b-a}{2}\right)(f(a)+f(b)) + \frac{(b-a)^2}{12}\cdot(f'(a) - f'(b))$$

Corrected Trapezoid

את הפונקציה הזו נחליף בה $\sum g_j l_j$ או משהו כזה.

עבור b-a גדול:

I) נחלק את a-b לתת קטעים ונפעיל על כל קטע בנפרד (אינטרפולציה למקוטעין)

Composite Rule

II) נבנה פולינום ממעלה מאוד גבוהה

$a \quad b$

$a=x_0 < x_1 \; . \; . \; . \; . \; . \; x_N=b$

— כלל מלבן על כל הקטע. Composite Rectangular

כמו סכום של הקטעים שמחלקים. אינטגרל רימן!

$I \approx \sum f(x_j)\cdot h = (f_0+f_1+\dots+f_{N-1})h, \quad h = x_j - x_{j-1} = \frac{b-a}{N}$

השגיאה היא סכום השגיאות על כל הקטעים

$E = \sum_{j=1}^{N} \frac{f'(\eta_j)}{2}\cdot h^2 \leq \frac{1}{2}\cdot h \cdot |f'(\eta)|\cdot(b-a)$

יורד המרווח של h

כי n הוא $\frac{1}{h}$.

כלל הטרפז:

$I = \sum_{j=1}^{N-1} \frac{h}{2}\cdot\left(f(x_j)+f(x_{j-1})\right)$

$I = \left(\frac{f_0}{2}+f_1+\dots+f_{N-1}+\frac{f_N}{2}\right)\cdot h$ כל איבר מופיע פעמיים. אז כל אחד חוץ מהקצוות.

$|E| = \left|\sum_{j=1}^{N} -\frac{h^3}{12}\cdot f''(\eta_j)\right| \leq |f''(\eta)|\cdot\frac{b-a}{12}h^2$

התנאי קיום המקסימום

$N = \frac{b-a}{h}$ פעמים N ולכן נשאר בחזקה h

פולינומים אורתוגונליים

מכפלה פנימית

$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)\cdot g(x)\cdot w(x)\,dx$

$w(x)>0$ כמעט בכל מקום.

$\langle f,g\rangle = \sum_{j=0}^{N} f(x_j)\cdot g(x_j)\cdot w(x_j)$

כאשר $w(x_j)>0$.

דוגמאות:

$\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f\cdot g\,dx \quad (w=1)$

$\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{f\cdot g}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

נאמר שסדרת הפולינומים $\{p_j(x)\}$ היא אורתוגונלית אם:

א. p_j הוא פולינום ממעלה j: $p_j = \alpha_j\cdot x^j +$ פולינום ממעלה נמוכה.

ב. $\langle p_j, p_k\rangle = 0$ $\forall j \neq k$.

דוגמה

$p_0 = 1, \quad p_1 = x, \quad p_2 = 3x^2-1$

$\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f\cdot g\,dx$ ביחס ל- (ביחס למכפלה הפנימית הספציפית)

אם ניקח כל זוג פולינומים p_0 ו-p_1 וכן הלאה, (כגון) נקבל אם נציב במכפלה הפנימית יצא 0.

תכונות

1. תהי סדרה $\{p_j\}$ $j=0\dots k$ ופולינום Q ממעלה $\leq k$, אז:

הפולינומים מהווים בסיס אורתוגונלי.

$Q(x) = \sum_{j=0}^{k} a_j\cdot p_j(x)$

כאשר a_j נקבעים ביחידות.

2. אם Q פולינום ממעלה קטנה מ-k, אז: $\langle p_k, Q\rangle = 0$, $\langle p_k, \sum_{j=0}^{k-1} a_j p_j\rangle = 0$

3. ל-p_k יש k אפסים ממשיים ופשוטים בקטע (a,b)