לוגיקה - תרגול 12

27/5/10

נעסוק היום בנושא של משפט הרברנד, נבין אותו ונראה כיצד משתמשים בו.

משפט הרברנד

תהי T תורה אוניברסלית בשפה עם לפחות קבוע אחד.
T ספיקה ב-FOL $\iff$ T^* (הקבוצה האינסטנציות הסגורות של המטריצות של איברי T) ספיקה ב-CPL.
(במילים: לבדוק ספיקות בתחשיב הפרדיקטים, ניתן לבדוק ספיקות בתחשיב הפסוקים שהוא קל יותר)

כל הפסוק ב-T מהצורה $\forall x_1 \ldots \forall x_n \varphi(x_1,\ldots,x_n)$

המטריצה זה הנוסחה אחרי כל ה-$\forall$ - $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$

אינסטנציה סגורה של המטריצה: מציבים שמות עצם סגורים במקום המשתנים החופשיים; $t_1,\ldots,t_n$ ש"ע $\varphi\{\frac{t_1}{x_1},\ldots,\frac{t_n}{x_n}\}$

למשל אינסטנציה סגורה של המטריצה של $\forall x P(x)$ ו-c קבוע בשפה הוא $P(c)$.

המגבלה העיקרית במשפט היא שמדובר בתורות אוניברסליות בלבד.

הסקולמיזציה: להעביר פסוק φ לפסוק אוניברסלי φ' כך ש φ' ספיק $\iff$ φ ספיק

① שינוי שמות משתנים קשורים (כלל φ)

דוגמה: $\neg\exists x\forall y\exists z((P(x,y)\land R(z))\lor\exists x R(x))$

$\neg\exists w\forall y\exists z((P(w,y)\land R(z))\lor\exists x R(x))$

② שימוש משקולות להעברה לצורת PNF: $Qx_1\ldots Qx_n\varphi$
כך ש-Q כמת ו-φ - נוסחה ללא כמתים.
(נוסחה בצורת PNF הוא לא בהכרח פסוק למשל: $\forall x P(x,y)$)
נשתמש בשקילות 6 כדי למשוך את $\exists x$ החוצה:

$\neg\exists w\forall y\exists z\exists x((P(w,y)\land R(z))\lor R(x))$

כעת נדחוף את השלילה פנימה באמצעות השקילות ב-1:

$\forall w\exists y\forall z\forall x\neg((P(w,y)\land R(z))\lor R(x))$

בצורת PNF יתכן $\exists$ בכמתים, לכן כעת יש להפטר מהם.

3) תהליך סקולמיזציה (מסלק כמתי ישות) של φ

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \exists y\, \varphi(x_1,\ldots,x_n,y) \rightsquigarrow \underbrace{\forall x_1 \ldots \forall x_n\, \varphi(x_1,\ldots,x_n,f(x_1,\ldots,x_n))}_{Sk(\varphi)}$$

f סימן פונ' חדש.

נשים לב ש-φ ו-Sk(φ) הן לא סינטקטית שקולות כי ב-Sk(φ) יש סימן פונ' חדש. הן רק נוסחאות שקולות ספיקות: אחת ספיקה אמ"מ השנייה ספיקה.

c סימן קבוע חדש $\quad \exists y\, \varphi(y) \rightsquigarrow \varphi(c)$

נחזור לדוגמה: $\forall w \forall z \forall x \neg((P(w,f(w)) \wedge R(z)) \vee R(x))$

את התרגיל מהמבחן מה-תרגיל האחרון בדר"כ רושמים להוכיח באמצעות רזולוציה. [illegible]

__תרגיל__

1) לכל קבוצה X קיימת קבוצה Y כך שעוצמת Y גדולה מעוצמת X.
2) לכל קבוצות X, Y אם X מוכלת ב-Y אז עוצמת X אינה גדולה מעוצמת Y.
3) כל קבוצה מוכלת ב-V.
4) V אינה קבוצה.

כדי להכריע, נקבע תחילה מה יש בסיגנטורה:

__סיגנטורה__

יחסים	פונ'	קבועים
Set	$\lvert x\rvert \Leftarrow f(x)$	V

[טיפ חשוב: ניתן לקחת את הסימנים הרגילים < ⊆ ולעבוד איתם (זה מה שבדר"כ עושים). אבל אם לא רוצים, מומלץ רק לבחור בהפרדה בין הסימן למשמעות בסימנים הרגילים. מומלץ לפשט את ההגדרה את המשמעות שעומדת מאחוריה.]

$x<y \Leftarrow P(x,y)$

$x \subseteq y \Leftarrow R(x,y)$

הגדרות

1) $\varphi_1 = \forall x (Set(x) \rightarrow \exists y (Set(y) \wedge P(f(x), f(y))))$

2) $\varphi_2 = \forall x \forall y (Set(x) \wedge Set(y) \rightarrow (R(x,y) \rightarrow \neg P(f(y), f(x))))$

3) $\varphi_3 = \forall x (Set(x) \rightarrow R(x,V))$

4) $\varphi_4 = \neg Set(V)$

כעת נרצה להוכיח: $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \vdash_{FOL} \varphi_4$

(משפט הרברנד מדבר על ספיקות לא על נביעה)

הוכחנו: $T = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \neg\varphi_4\}$ לא ספיקה.

T עדיין לא תורה אוניברסלית, יש להפוך אותה לכזו.

לא צריך לשנות שמור משמעות קושרים.

$$\mathrm{Prenex}(T) = \begin{cases} \forall x \exists y (\dots) \; * \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ Set(v) \end{cases}$$

* רק יש אחת בצורה פרנקס, נשתמש בסקולם (!!!)

$$Sk(\mathrm{Prenex}(T)) = \begin{cases} \cancel{\forall x \exists y (Set(x) \to (Set(y) \wedge P(f(x), f(y))))} \\ \forall x \, (Set(x) \to (Set(g(x)) \wedge P(f(x), f(g(x))))) \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ Set(v) \end{cases}$$

כעת יש לנו תורה אוניברסלית של פסוקים שנרצה לבדוק אם אינה ספיקה.

מרחב הרברנד: (קבוצת שמות העצם הסגורים בשפה)

$$\{v, f(v), g(v), f(g(v)), \dots\}$$

אלו ש״ע הסגורים שניתן להציב.

$$T^* = \begin{cases} \overset{t}{\overbrace{Set(v)}} \to (\overset{t}{\overbrace{Set(g(v))}} \wedge \overset{t}{\overbrace{P(f(v), f(g(v)))}}) \; \Delta \\ \overset{t}{\overbrace{Set(g(v))}} \wedge \overset{t}{\overbrace{Set(v)}} \to (\overset{t}{\overbrace{R(g(v), v)}} \to \underbrace{\neg P(f(v), f(g(v)))}_{t}) \\ \overset{t}{\overbrace{Set(g(v))}} \to \overset{t}{\overbrace{R(g(v), v)}} \\ \overset{t}{\overbrace{Set(v)}} \\ \dots \end{cases}$$

(בד״כ משתמשים במשפט להוכיח ש-T^* לא ספיקה)

Δ נציב ב- φ_1 את v במקום x, וכך נקבל אינסטנציה סגורה של המטריצה של φ_1.

ב- φ_2 יש $\neg P(f(y), f(x))$, נרצה להשתמש במשהו ושלילה יחד עם הפסוק הקודם ולכן נציב במקום y את v ובמקום x את $g(v)$.

$$\begin{pmatrix} y := v \\ x := g(v) \end{pmatrix}$$

לפסוק השלישי נציב $x := g(v)$.

הערה סתירה: $P(f(v), f(g(v)))$ וגם השלילה שלו יהיה t.

T^* מכילה תת-קבוצה שאינה ספיקה ולכן היא אינה ספיקה, ולכן
עפ"י משפט הרברנד T אינה ספיקה.

הוכח כי $\psi = \forall\varepsilon\exists\delta\forall x P(\varepsilon,\delta,x) \to \forall\varepsilon\forall x\exists\delta P(\varepsilon,\delta,x)$ תקפה לוגית.

(שימוש נוסף של משפט הרברנד - כדי להוכיח תקפות לוגית
לספיקות: ψ תקפה לוגית $\iff$ $\neg\psi$ לא ספיקה (שקילויות)

$$\neg\psi \equiv \forall\varepsilon\exists\delta\forall x P(\varepsilon,\delta,x) \wedge \neg\forall\varepsilon\forall x\exists\delta P(\varepsilon,\delta,x) \equiv$$
$$\equiv \forall\varepsilon\exists\delta\forall x P(\varepsilon,\delta,x) \wedge \neg\forall\varepsilon'\forall x'\exists\delta' P(\varepsilon',\delta',x') \equiv$$
$$\equiv \forall\varepsilon\exists\delta\forall x P(\varepsilon,\delta,x) \wedge \exists\varepsilon'\exists x'\forall\delta' \neg P(\varepsilon',\delta',x')$$
$$Prenex(\neg\psi) = \underline{\exists\varepsilon'}\,\underline{\exists x'}\,\forall\varepsilon\forall\delta'\,\underline{\exists\delta}\,\forall x(P(\varepsilon,\delta,x) \wedge \neg P(\varepsilon',\delta',x'))$$

אין רק צורה פרנקסית אחת - ניתן ~~למשוך כמתים~~ בסדר שונה. אך
כדי קודם למשוך את הכמתים הישיים כי ככל שיותר כמות
יתחלפו בקבועים יותר פשוטים בתהליך הסקולמיזציה.

$$T = Sk(Prenex(\neg\psi)) = \forall\varepsilon\forall\delta'\forall x(P(\varepsilon,f(\varepsilon,\delta'),x) \wedge \neg P(a,\delta',b))$$

מרחב הרברנד: $\{a,b,f(a,a),f(a,b),\ldots\}$

$$T^* = \begin{cases} P(a,f(a,f(a,b)),a) \wedge \neg P(a,f(a,b),b) \\ P(a,f(a,b),b) \wedge \neg P(a,b,b) \end{cases}$$

ניתן למצוא סתירה בין 2 אינסטנציות שונות - וזה מה שעשינו פה.

דרך אחרת: (תקפות לוגית זה נביעה מהקבוצה הריקה)

$$\vdash_{FOL} \forall\varepsilon\exists\delta\forall x P(\varepsilon,\delta,x) \to \forall\varepsilon\forall x\exists\delta P(\varepsilon,\delta,x)$$
$\Updownarrow$ משפט הדדוקציה
$$\forall\varepsilon\exists\delta\forall x P(\varepsilon,\delta,x) \vdash_{FOL} \forall\varepsilon\forall x\exists\delta P(\varepsilon,\delta,x)$$
$\Updownarrow$
$$T = \{\forall\varepsilon\exists\delta\forall x P(\varepsilon,\delta,x),\ \neg\forall\varepsilon\forall x\exists\delta P(\varepsilon,\delta,x)\}$$ לא ספיקה.
$$\exists\varepsilon\exists x\forall\delta\neg P$$

צריך תורה שיהיה יותר קל לבדוק אותה.

$$Sk(T) = \{\forall\varepsilon\forall x \boxed{P(\varepsilon,f(\varepsilon),x)},\ \forall\delta\boxed{\neg P(a,\delta,b)}\}$$

מרחב הרברנד: $\{a,b,f(a),f(b),\ldots\}$

כעת הרבה יותר קל להגיע לסתירה: במקום δ ניקח את $f(a)$
ובמקום x את a ובמקום ε את b.