סיכום נקודות בלוגיקה

תזכורות ממתמטיקה בדידה

מיו μ – קשר $(\mu n.A)$ שמשמעותו ה-n הטבעי הראשון שמקיים את A.

איוטה ι – קשר $(\iota x.A)$ שמשמעותו ה-x היחיד המקיים את A.

$A\Delta B$ (ההפרש הסימטרי) – כל האיברים שנמצאים <u>בדיוק באחת</u> מהקבוצות A ו-B.

ניתן להתייחס **לפונקציה** כיחס המקיים תנאי החד-ערכיות: $\forall a \forall b_1 \forall b_2 . < a, b_1 >\in f \wedge < a, b_2 >\in f \rightarrow b_1 = b_2$.
פונקציה חלקית מ-A ל-B היא יחס מ-A ל-B המקיים את תנאי החד-ערכיות הנ"ל.
פונקציה מ-A ל-B היא פונקציה חלקית f מ-A ל-B המקיימת:
$\forall a \in A \exists b \in B. < a, b >\in f$.

אם R הוא יחס, אז **היחס ההפוך** R^{-1} מוגדר ע"י
$R^{-1} = \{< b, a > \mid < a, b >\in R\}$.

הרכבה של יחסים $R \circ S$ המוגדרת
$R \circ S = \{< a, c >\in AxC \mid \exists b \in B. < a, b >\in S \wedge < b, c >\in R\}$.

יחס R על קבוצה A נקרא **רפלקסיבי** אם $\forall x \in A. xRx$.
יחס R נקרא **אי רפלקסיבי** אם $\forall x.^{-} (xRx)$.
אם מתקיים $\forall x \in A.^{-} (xRx)$, היחס נקרא אי רפלקסיבי על A.

יחס R נקרא **טרנסיטיבי** אם $\forall x \forall y \forall z. xRy \wedge yRz \rightarrow xRz$.

יחס R נקרא **סימטרי** אם $\forall x \forall y. xRy \rightarrow yRx$,
אנטי סימטרי חזק אם $\forall x \forall y. xRy \rightarrow^{-} (yRx)$
ואנטי סימטרי (חלש) אם $\forall x \forall y. xRy \wedge yRx \rightarrow x = y$.

יחס R יקרא **יחס סדר חלקי** על A אם הוא רפלקסיבי, אנטי סימטרי וטרנזיטיבי.
יחס סדר חלקי יקרא **מלא** על A אם מתקיים גם כי $\forall x \in A \forall y \in A. xRy \vee yRx$.

יחס R יקרא **יחס סדר חלקי חזק** על A אם הוא טרנסיטיבי ואי רפלקסיבי על A.
יחס כזה יקרא **מלא** על A אם מתקיים $\forall x \in A \forall y \in A. xRy \vee yRx \vee x = y$.

יחס R יקרא **שקילות** על A אם הוא רפלקסיבי על A, סימטרי וטרנזיטיבי.
אם R הוא יחס שקילות, **מחלקת השקילות** של x לפי R היא $[x]_R = \{y \in A | xRy\}$.
אם R יחס שקילות על A, **קבוצת המנה** של R על A היא $A/R = \{[x]_R | x \in A\}$.

R יחס סדר על A. ההגדרות יחסית ל-A.
רפלקסיבי $\forall a \in A. aRa$ **אי רפלקסיבי** $\forall a \in A.^{-} (aRa)$
סימטרי $\forall a \in A \forall b \in A. aRb \rightarrow bRa$ **אנטי סימטרי** $\forall a \in A \forall b \in A. (aRb \wedge bRa) \rightarrow a = b$ **אנטי סימטרי חזק** $\forall a \in A \forall b \in A. aRb \rightarrow^{-} (bRa)$
טרנסיטיבי $\forall a, b, c \in A. (aRb \wedge bRc) \rightarrow aRc$
יחס סדר חלקי R רפלקסיבי, אנטי סימטרי וטרנזיטיבי **יחס סדר מלא** R יחס סדר חלקי ובנוסף מתקיים $\forall a \in A \forall b \in A. aRb \vee bRa$ **יחס סדר חלקי חזק** R אי רפלקסיבי וטרנסיטיבי **יחס סדר מלא חזק** R יחס סדר חלקי חזק ובנוסף מתקיים $\forall a \in A \forall b \in A. aRb \vee a = b \vee bRa$
יחס שקילות R רפלקסיבי, סימטרי וטרנסיטיבי
מחלקת שקילות $[x]_R = \{y \in A \vert xRy\}$. **קבוצת מנה** $A/R = \{[x]_R \vert x \in A\}$.

לוגיקה

יחס נביעה $\vdash$ היא יחס בין קבוצות של נוסחאות לנוסחאות המקיים "**רפלקסיביות**" $(A \in T \rightarrow T \vdash A)$,
מונוטוניות (אם $T \vdash A$ וגם $T \subseteq S$ אז $S \vdash A$) ו"**טרנסיטיביות**" (אם $T \vdash \varphi$ ו-$T, \varphi \vdash \psi$ אז $T \vdash \psi$).

תחשיב הפסוקים הקלאסי (CPL)

מוגדר מעל הא"ב: פסוקים אטומיים (p1,p2,p3...), קשרים $\rightarrow, \wedge, \vee, -$ וסוגריים. הקטגוריה הסינטקטית היא נוסחה (או פסוק) כאשר

1. כל פסוק אטומי הוא נוסחה.
2. אם φ, ψ נוסחאות אז $-\varphi, (\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \rightarrow \psi)$ נוסחאות.

טענות על נוסחאות ב-CPL (להוכחה שמשהו אינו נוסחה): מספר הסוגרים הימיניים והשמאליים שווה, בין כל 2 פסוקים אטומים מופיע קשר, קשר "וגם" אינו יכול להופיע בצמוד לסוגר, מספר הסוגיים השמאליים שווה למספר הקשרים הבינאריים, מילה ב-CPL אינה מתחילה בסוגר ימיני.

הגדרה <u>סמנטית</u> לנביעה– ב-CPL ה"מבנה" נקרא "השמה" (פונקציה v מקבוצת הנוסחאות אל {t,f} המקיימת:
$v(-\varphi) = -^{*}(v(\varphi)),\ v(\varphi \circ \psi) = \circ^{*}(v(\varphi), v(\psi)),\ \circ = \{\vee, \wedge, \rightarrow\}$ כאשר X^{*} היא פונקציית האמת המתאימה ל-X).

נוסחה תקרא **טאוטולוגיה** (סימון $\vdash_{CPL} \varphi$)אם כל השמה היא מודל שלה.
למה: $\boldsymbol{\vdash_{CPL} \varphi \leftrightarrow \emptyset \vdash_{CPL} \varphi}$ (כי כל השמה היא מודל של הקבוצה הריקה).

תורה **ספיקה** אם יש לה מודל. בהתאם, תורה **אי ספיקה** היא תורה שאין לה מודל. פסוק ללא מודל נקרא **סתירה**.

פסוקים A, B **שקולים לוגית** אם לכל השמה v מתקיים v[A]=t אמ"ם v[B]=t.

נשים לב ש**טאוטולוגיה** נובעת מכל תורה ושכל נוסחה נובעת מנוסחה שהיא **סתירה**.

טענה: פסוקים A, B שקולים לוגית אמ"ם $\vdash_{CPL} (A \to B) \wedge (B \to A)$.

טענה: יהי A פסוק ו-v, v' השמות כלשהן. אם לכל $p \in At[A]$ מתקיים v'[p]=v[p] אז v[A]=v'[A] (אינדוקציה מבנית).

קבוצת הנוסחאות האטומיות של φ מוגדרת כך:

- $At[p] = \{p\}$.
- $At[-\varphi] = At[\varphi]$.
- $At[(\varphi \circ \psi)] = At[\varphi] \cup At[\psi]$ עבור $\circ = \{\vee, \wedge, \to\}$.

קבוצת תת הנוסחאות של A מוגדרת כך:

- $Sf[p] = \{p\}$.
- $Sf[-A] = Sf[A] \cup \{A\}$.
- $Sf[(A \circ B)] = Sf[A] \cup Sf[B] \cup \{(A \circ B)\}$ עבור $\circ = \{\vee, \wedge, \to\}$.

הצבה: אם φ,A נוסחאות ו-p פסוק אטומי, אז $\varphi\left\{\frac{A}{p}\right\}$ הינו הפסוק המתקבל מ-φ ע"י הצבת A במקום p ומוגדר כך:

- אם $\varphi = p$ אז $\varphi\left\{\frac{A}{p}\right\} = A$.
- אם $\varphi = q$ כאשר $q \neq p$ אז $\varphi\left\{\frac{A}{p}\right\} = q$.
- אם $\varphi = -\psi$ אז $\varphi\left\{\frac{A}{p}\right\} = -\psi\left\{\frac{A}{p}\right\}$.
- אם $\varphi = (\psi_1 \circ \psi_2)$ אז $\varphi\left\{\frac{A}{p}\right\} = \left(\psi_1\left\{\frac{A}{p}\right\} \circ \psi_2\left\{\frac{A}{p}\right\}\right)$ עבור $\circ = \{\vee, \wedge, \to\}$.

הערה: $\varphi\left\{\frac{A}{p}, \frac{B}{q}, \dots\right\}$ מציין הצבה סימולטנית.

משפט ההצבה: יהיו φ נוסחה, v השמה, $q_1, \dots, q_n$ נוסחאות אטומיות שונות זו מזו ו-$A_1,\dots,A_n$ נוסחאות (לא בהכרח שונות). תהי v' השמה כך שאם $p=q_i$ אז $v'(p)=v(A_i)$. אחרת, $v'(p)=v(p)$ אזי $v'(\varphi) = v(\varphi\{A_1/p_1, \dots, A_n/p_n\})$.

טענה: אם v, v' השמות כך ש-$v'(p)=v(p)$ לכל $p \in At[\varphi]$ אז $v'(\varphi)=v(\varphi)$ (הוכחה באינדוקציה מבנית).

טענה: אם $T \vdash_{CPL} A$ ו-σ הצבה אז $\sigma(T) \vdash \sigma(A)$.

משפט ההחלפה: נניח v השמה, A נוסחה ו-p פסוק אטומי, נגדיר השמה v' כך שאם q=p אז v'[q]=v[A], אחרת v'[q]=v[q] (q פסוק אטומי). אז לכל פסוק B מתקיים v'[B]=v[B{A/p}].

רדוקציות לשאלת נביעה

- $T \vdash_{CPL} \varphi$ אמ"ם $T \cup \{-\varphi\}$ אינה ספיקה.
- לתורות סופיות – $\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n\} \vdash_{CPL} \varphi$ אמ"ם הפסוק $(\psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \dots \wedge \psi_n) \to \varphi$ הוא טאוטולוגיה.

משפט הקומפקטיות

1. T ספיקה אמ"ם כל קבוצה סופית חלקית שלה היא ספיקה.
2. $T \vdash_{CPL} \varphi$ אמ"ם יש $\Gamma \subseteq T$ סופית כך ש-$\Gamma \vdash_{CPL} \varphi$.

הגדרה סינטקטית לנביעה– $T \vdash_{HPC} \varphi$ אם ל-φ יש הוכחה מ-T.

הוכחה של פסוק φ מתורה T ב-HPC היא סדרה סופית של פסוקים כך שהפסוק האחרון בסדרה הוא φ. כל איבר בסדרה הוא אקסיומה של HPC, איבר של T או פסוק שמתקבל משני פסוקים קודמים בסדרה בעזרת היסק MP.

טענה: $T \vdash_{HPC} \varphi$ אמ"ם יש $\Gamma \subseteq T$ סופית כך ש-$\Gamma \vdash_{HPC} \varphi$.

תורה T תקרא **קונסיסטנטית** ב-HPC אם אין פסוק A כך שגם $T\vdash_{HPC} A$ וגם $T\vdash_{HPC} -A$. בניסוח אחר, קיים פסוק A כך ש $T\nvdash_{HPC} -A$.

משפט הנאותות והשלמות - $\vdash_{HPC}=\vdash_{CPL}$. הוכחת **נאותות** ($\vdash_{HPC}\rightarrow\vdash_{CPL}$) מוכיחים באמצעות אינדוקציה על אורך ההוכחה. הוכחת **שלמות** ($\vdash_{CPL}\rightarrow\vdash_{HPC}$) היא ארוכה ומציקה (שיעור 4 בסיכומים של אברון). נוסח ב' למשפט השלמות: **T היא תורה ספיקה ב-CPL אמ"ם T היא קונסיסטנטית ב-HPC.**

טענה: אם לכל פסוק A ב-T_1 מתקיים $T_2\vdash_{HPC} A$ אז לכל פסוק B, אם $T_1\vdash_{HPC} B$ אז $T_2\vdash_{HPC} B$.

משפט הדדוקציה הסמנטי - $T\cup\{A\}\vdash_{CPL} B$ אמ"ם $T\vdash_{CPL} A\rightarrow B$.

משפט הדדוקציה הסינטקטי - $T\cup\{A\}\vdash_{HPC} B$ אמ"ם $T\vdash_{HPC} A\rightarrow B$ (אינדוקציה על ההוכחה). המשפט נכון עבור כל מערכת נוסח הילברט בה קיימות האקסיומות I1 ו-I2 ו-MP הוא כלל ההיסק <u>היחיד</u> עבור <u>שפה עם קשר הגרירה</u>.

דדוקציה טבעית – נאמר ש$T\vdash_{NDC} A$ אם קיימת $\square\subseteq T$ סופית כך שלסקוונט $\Gamma\Rightarrow A$ יש הוכחה ב-NDC.

שקלויות לוגיות – $A\leftrightarrow B=_{DF}(A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A)$
שני פסוקים יקראו **שקולים לוגית** ($A\equiv B$) אם $\vdash_{CPL} A\leftrightarrow B$.
משפט הצבת אקוויוולנטים: אם $T\vdash A\leftrightarrow B$ אז לכל נוסחה φ ופסוק אטומי p מתקיים $T\vdash\varphi\{A/p\}\leftrightarrow\varphi\{B/p\}$.

נוסחה היא בצורת **NNF** אם קשר השלילה מופיע רק לפני פסוקים אטומיים. **ליטרל** זהו פסוק אטומי או שלילתו. פסוק ב**DNF** הוא "'או'ים של 'וגם'ים" ופסוק ב**CNF** הוא "'וגמים' של 'או'ים". כל פסוק אפשר להעביר לפסוק שקול בNNF, והן להביא לצורות DNF ו-CNF.

הגדרה נניח φ פסוק כך ש-$At(\varphi)=\{p_1,p_2,\dots,p_n\}$. נגדיר את $g_\varphi^{p_1,\dots,p_n}$ בתור הפונקציה מ-$\{t,f\}^n$ אל {t,f} המוגדרת ע"י $g_\varphi^{p_1,\dots,p_n}(\mathrm{m}_1,\dots,\mathrm{m}_\mathrm{n})=\mathrm{v}(\varphi)$ כאשר $m_i\in\{t,f\}$ לכל i ו-v השמה כך ש-$v(p_i)=m_i$.

טענה: לכל $f:\{t,f\}^n\rightarrow\{t,f\}$ ניתן למצוא נוסחא φ כך ש-$f=g_\varphi^{p_1,\dots,p_n}$. מהטענה נובע כי $\{-,\wedge,\vee,\rightarrow\}$ מספיקים להגדרת כל פונקציה מ-$\{t,f\}^n$ אל {t,f}.

מציאת נוסחה לפונקציה: נסתכל בטבלת האמת של הפונקציה. עבור צורת DNF, עבור כל שורה בה הפונקציה מקבלת t, נרשום הסגרי "או" (שיחוברו יחד ע"י "וגם") לפי ערכי האמת של הפסוקים האטומים באותה השורה (אם p קיבל ערך t נרשום בהסגר p, אם קיבל f נרשם p−). עבור צורת CNF, נמצא צורת DNF אך עבור השורות שמקבלות f ואז נהפוך "או" ל-"וגם", "וגם" ל-"או" וליטרל עם שלילתו (תרגול 6)

קבוצת <u>קשרים</u> S תקרא **שלמה פונקציונאלית** אם לכל פונקצית אמת f ישנה נוסחה A מעל $p=<p_1,\dots p_n>$ כך ש-A מעל S ו-$f=g_A^p$.

לוגיקה רב ערכית

במקום שני ערכי אמת, יש קבוצה של ערכי אמת S היכולה להיות אינסופית. מגדירים גם קבוצת ערכים מצוינים D כך ש-D אינה ריקה ומוכלת <u>ממש </u>ב-S. לכל קשר n-מקומי מגדירים פונקצית אמת מתאימה. השמה מוגדרת להיות פונקציה מקבוצת הנוסחאות אל S, המכבדת את טבלאות האמת החדשות. השמה v תהיה מודל של נוסחא A אם $v(A)\in D$.

תחשיב הפרדיקטים

סיגנטורה של שפה –מכילה סימני קבועים, סימני פונקציה ו<u>לפחות סימן יחס אחד</u>.

שם עצם – יכול להיות **קבוע**, **משתנה**, או **f(t₁,…,tₙ)** (כאשר f סימן פונקציה ו-$t_1,\dots,t_n$ שמות עצם).
נוסחא – יכולה להיות $\mathbf{p(t_1,\dots,t_n)}$ (כאשר p סימן יחס ו-$t_1,\dots,t_n$ שמות עצם), $-\boldsymbol{A}$, $(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})$ (כאשר $\circ=\{\vee,\wedge,\rightarrow\}$ ו-A,B נוסחאות) או $\exists\boldsymbol{x}.\boldsymbol{A}$,$\forall\boldsymbol{x}.\boldsymbol{A}$ (כאשר x משתנה ו-A נוסחא).

הצבה (סימון $\varphi\{s/x\}$, s שם עצם, x משתנה)

<u>שמות עצם</u> – עבור t קבוע: $t\{s/x\}=t$, עבור t משתנה השונה מ-x: $t\{s/x\}=t$, עבור t משתנה השווה ל-x: $t\{s/x\}=s$ ועבור t=f (f פונקציה n מקומית): $t\{s/x\}=f(t_1\{s/x\},\dots,t_n\{s/x\})$.

<u>נוסחאות</u> – עבור סימני יחס וקשרים, "מכניסים" את ההצבה "פנימה". עבור כמתים, "מכניסים פנימה" רק אם x אינו קשור ע"י הכמת.

אם x, y משתנים שונים, s ו-t ש"ע, A נוסחה ו-t חופשי להצבה עבור x ב-A אז $A\{t/x\}\{s/y\}=A\{[t\{s/y\}]/x,s/y\}$.

קבוצת המשתנים החופשיים
<u>שמות עצם</u> – $Fv[c]=\emptyset$ (c קבוע), $Fv[x]=x$ (x משתנה), $Fv[f(t_1,\dots,t_n)]=Fv[t_1]\cup\dots\cup Fv[t_n]$ (f סימן פונקציה ו-$t_1,\dots,t_n$ שמות עצם).

<u>נוסחאות</u> - $Fv[p(t_1,\dots,t_n)]=Fv[t_1]\cup\dots\cup Fv[t_n]$ (p סימן יחס ו-$t_1,\dots,t_n$ שמות עצם), $Fv[-A]=Fv[A]$ $Fv[(A\circ B)]=Fv[A]\cup Fv[B]$ (A, B נוסחאות, $\circ\in\{\wedge,\vee,\to\}$), $Fv[\forall x.A]=Fv[\exists x.A]=Fv[A]/x$ (x משתנה, A נוסחא).

שם עצם t יקרא **שם עצם סגור** אם $Fv[t]=\emptyset$. נוסחא A תקרא **פסוק** אם $Fv[A]=\emptyset$.

סמנטיקה בשפות מסדר ראשון

מבנה הוא זוג סדור <D,I> בו D הוא קבוצה <u>לא ריקה</u> שנקראת **התחום** ו-I היא פונקציה שהתחום שלה הוא הסיגנטורה ומקיימת את הדרישות: $I[c]\in D$ (c קבוע), $I[f]:D^n\to D$ (f סימן פונקציה) ו-$I[p]\subseteq D^n$ (p סימן יחס n-מקומי).

פונקציה מקבוצת המשתנים של השפה אל D נקראת **השמה** במבנה <D,I>. מרחיבים את מושג ההשמה בצורה הבאה: $v[c]=I[c]$ (c קבוע), $v[f(t_1,\dots,t_n)]=I[f](v[t_1],\dots,v[t_n])$ (f סימן פונקציה ו$t_1,\dots,t_n$ שמות עצם).

זוג M,v בו M הוא מבנה ו-v היא השמה יקרא **t-מודל** של נוסחה A אם $M,v\vDash A$.

נוסחה A תקרא **תקפה** במבנה M ($M\vDash A$) אם $M,v\vDash A$ לכל השמה v. M יקרא **v-מודל** של A.
נוסחה A תקרא **תקפה לוגיקת** אם היא תקפה בכל מבנה. נוסחה A תקרא **t-תקפה לוגית** אם $\emptyset\vdash_{FOL}^{t}A$ ו-**v-תקפה לוגית** אם $\emptyset\vdash_{FOL}^{v}A$ (בעצם אין לכך משמעות כי $\emptyset$.מורכבת מפסוקים).

זהירות בולען: <u>לא מתקיים</u> $M\vDash -A$ אמ"ם $M\nvDash A$!

סגור של נוסחא A הוא כל פסוק מהצורה $\forall x_1\dots\forall x_nA$ כאשר $Fv[A]=\{x_1,\dots,x_n\}$. נשים לב שסגור 'A של נוסחה A תמיד יהיה פסוק. בנוסף, 'A v-שקול לוגית ל-A ($A'\vdash_v A$ ו- $A\vdash_v A'$).

תכונות נביעה

- $\vdash_t\subseteq\vdash_v$
- אם T מורכבת מפסוקים אז $T\vdash_t A\to T\vdash_v A$.
- **כלל ההכללה וכלל ההצבה נכונים עבור v-נביעה**: לפי כלל **הכללה** מתקיים $A\vdash_v\forall x.A$ אבל בדר"כ $A\nvdash_t\forall x.A$. לפי **עקרון ההצבה** מתקיים $A\vdash_v A\{t/x\}$ (עבור t חופשי להצבה במקום x) אבל בדר"כ $A\nvdash_t A\{t/x\}$.
- **תכונת הדדוקציה נכונה עבר t-נביעה** (ועבור v-נביעה כש-T מורכבת מפסוקים).
- יהיו ...x1,x2 המשתנים החופשיים המופיעים ב-T ויהיו ...d1,d2 קבועים חדשים שאינם מופיעים ב-$T\cup\{A\}$ השונים זה מזה. אז $T\vdash_t A$ אמ"ם $T\{d1/x1,d2/x2,\dots\}\vdash A\{d1/x1,d2/x2,\dots\}$ (זו תורה של פסוקים).
- עבור A נוסחה, T תורה בה המשתנים החופשיים $x_1,\dots,x_n$ ו-$d_1,\dots,d_n$ קבועים חדשים שאינם ב-$T\cup\{A\}$ מתקיים $\boldsymbol{T\vdash_t A\leftrightarrow T\{d_1/x_1,\dots,d_n/x_n\}\vdash_t A\{d_1/x_1,\dots,d_n/x_n\}}$ (מעבר לנביעה של פסוקים).
- עבור A נוסחה ו-T תורה מתקיים $\boldsymbol{T\vdash_v A\leftrightarrow\forall T\vdash_v\forall A}$ (מעבר לנביעה של פסוקים).

תכונות ספיקות

- אם T v-ספיקה אז T גם t-ספיקה.
- אם T מורכבת מפסוקים אז T היא t-ספיקה אמ"ם היא v-ספיקה.
- T v-ספיקה אמ"ם $\forall T$ היא ספיקה.
- $T\cup\{A\}$ היא t-ספיקה אמ"ם $T\nvdash_t -A$.
- יהיו ...x1,x2 המשתנים החופשיים המופיעים ב-T ויהיו ...d1,d2 קבועים חדשים שאינם מופיעים ב-T השונים זה מזה. אז T היא t-ספיקה אמ"ם $T\{d1/x1,d2/x2,\dots\}$ היא ספיקה (זו תורה של פסוקים).

למה: אם $T\vdash_{HPC}A$ (T, A מורכבות מפסוקים בתחשיב הפסוקים) אזי $T*\vdash_{HFOL}A*$ כאשר *T*, A נוסחאות בתחשיב הפרדיקטים המתקבלות מ- T, A ע"י החלפת משתנים בנוסחאות מתחשיב הפרדיקטים.

משפט החלפת שקולים – ב-<u>v-נביעה</u>: אם $T\vdash_v A\leftrightarrow A'$ ו-'B התקבלה מ-B ע"י החלפת מופע אחד או יותר של A ב-'A אז $T\vdash_v B\leftrightarrow B'$.

משפטי השלמות בתחשיב הפרדיקטים

1. $T\dashv_v A\leftrightarrow T\vdash_{HFOL}A$
2. $T\dashv_t A\leftrightarrow T\vdash_{NDFOL}A$

הרברנד

מבנה הרברנד עבור שפה L עם קבוע הוא מבנה שבו: D=H(L), I[c]=c (c קבוע), אם f הינו סימן פונקציה אז $I[f] = \lambda x_1 \in H(L), \dots, x_n \in H(L). f(x_1, \dots, x_n)$ (כלומר $f^I[t_1, \dots, t_n] = f(t_1, \dots, t_n)$ $t_1, \dots t_n$ ש"סים).
באינדוקציה נקבל ש**לכל ש"ס t מתקיים I[t]=t**.

מבנה הרברנד נקבע לחלוטין ע"י קבוצת הפסוקים האטומיים הנכונים בו (נסמן (HB(M)). HB(M) נקרא **בסיס הרברנד.**

טענה: M=<H(L),I> מבנה הרברנד עבור השפה L ונניח ש-p סימן יחס n מקומי ב-L,
אז $I[p] = \{< t_1, \dots, t_n > \in H(L)^n | p(t_1, \dots, t_n) \in HB(M)\}$.
$M \vDash p(t_1, \dots, t_n) \leftrightarrow < I[t_1], \dots, I[t_n] > \in I[p] \leftrightarrow p(t_1, \dots, t_n) \in HB(M) \leftrightarrow M \vDash p(t_1, \dots, t_n)$

טענה אם M מבנה הרברנד ו-$\forall x. A$, $\exists x. A$ הם פסוקים אז

א. $M \vDash \forall x. A$ אמ"ם $M \vDash A\{s/x\}$ לכל ש"ס s.
ב. $M \vDash \exists x. A$ אמ"ם $M \vDash A\{s/x\}$ עבור איזשהו ש"ס s.

למה נניח M מבנה הרברנד, A נוסחה, x משתנה, v השמה ו-t שם עצם (לא בהכרח סגור) אז:

א. $v[t] = v[t\{v[x]/x\}]$ (הכתיבה חוקית כיוון שבמבנה הרברנד v[x] הוא גם שם עצם).
ב. $M, v \vDash A \leftrightarrow M, v \vDash A\{v[x]/x\}$.

מסקנות

א. אם $Fv(t) = \{x_1, \dots, x_n\}$ אז $v[t] = I[t\{v[x_1]/x, \dots, v[x_n]/x\}]$ (בתוך I מופיע ש"ס ולכן כתיבה חוקית).
ב. אם $Fv(A) = \{x_1, \dots, x_n\}$ אז $M, v \vDash A \leftrightarrow M, v \vDash A\{v[x_1]/x_1, \dots, v[x_n]/x_n\}$ (לאחר ההצבה A פסוק).

תנאי הנקין לתורה T: אם $\exists x A$ פסוק כך ש-$T \vdash_{HFOL} \exists x A$ אז קיים ש"ס t כך ש-$T \vdash_{HFOL} A\{t/x\}$.

תהליך סילוק כמתים ישיים נקרא **סקולמיזציה.** הפסוק המתקבל מ-A בתהליך זה מסומן על ידי Sk(A) והתורה המתקבלת מ-T מסומנת Sk(T). Sk(A) לא נקבע באופן יחיד (תלוי בסימני הפונקציות שנבחרו). **Sk(A) __אינו__ שקול ל-A (הם אפילו לא באותה שפה).** כל מודל של תורה T ניתן להרחיב למודל של Sk(T) (ולהפך). סימני הפונקציה שמוסיפים בתהליך נקראים **פונקציות סקולם** (למרות שבפועל הם רק סימני פונקציות).

משפט הרברנד – תהי T תורה אונברסלית בשפה L שיש בה קבוע אחד לפחות. אז T ספיקה כתורה ב-FOL אמ"ם T*, קבוצת האינסטנציות הסגורות של המטריצות של איברי T, ספיקה כתורה ב-CPL (אם אין ב-L סימן קבוע אז נגדיר את T* בשפה $L \cup \{c\}$ ואז T ספיקה כתורה ב-L אמ"ם T* ספיקה כתורה ב-L*).

אם לתורה של פסוקים אוניברסאליים T בשפה L שיש בה לפחות קבוע אחד, יש מודל אז יש לה מודל הרברנד.

משפט לוונהיים סקולם הפשוט – אם לתורה T יש מודל, אז יש לה מודל בן מניה.

משפט סקולם – קיים אלגוריתם הבונה לכל פסוק A פסוק אוניברסאלי 'A כך ש-A ספיק אמ"ם 'A ספיק.

לוגיקה מסדר ראשון עם שוויון

מבנה נורמאלי עבור שפה מסדר ראשון עם שוויון הוא מבנה שבו הפירוש של סימן היחס =[2] הוא יחס הזהות על D.

הגדרה: $T \vdash^t_{FOL=} A$ אם כל t-מודל נורמאלי של T הוא t-מודל של A. בצורה דומה גם עבור v-נביעה.

משפטים בסיסיים: $T \cup Eq(L) \vdash^t_{FOL} A \leftrightarrow T \vdash^t_{FOL=} A$, $T \cup Eq(L) \vdash^v_{FOL} A \leftrightarrow T \vdash^v_{FOL=} A$.

משפט אם M מבנה עבור שפה L כך ש-$M \vDash Eq(L)$ אז קיים מבנה נורמלי M* ופונקציה F מ-D על D* כך שלכל השמה v ולכל A ב-M מתקיים $M, v \vDash A \leftrightarrow M^*, F \circ v \vDash A$.

Eq(z) כולל הצרנה של רפלקסיביות $(\forall x. x = x)$, סימטריות $(\forall x \forall y. x = y \to y = x)$ וטרנזיטיביות $(\forall x \forall y \forall z. x = y \land y = z \to x = z)$ ובנוסף פונקציות המחייבות זהות של פונקציות וסימני יחס כאשר הפרמטרים זהים $(\forall x_1, \dots, \forall x_n \forall y_1, \dots, \forall y_n. x_1 = y_1 \land \dots \land x_n = y_n \to f(x1, \dots, x_n) = f(y_1, \dots, y_n))$ עבור סימני פונקציות ועבור סימני יחס $((\forall x_1, \dots, \forall x_n \forall y_1, \dots, \forall y_n. x_1 = y_1 \land \dots \land x_n = y_n \to (p(x1, \dots, x_n) \to p(y_1, \dots, y_n)))$.

בנק דוגמאות

1. "אם A ו-$A \to B$ ספיקות אז B ספיקה" (CPL) – דוגמה נגדית: A=p ו-$B = (q \wedge -q)$.
2. דוגמה נגדית המוכיחה $\vdash_t \not\supseteq \vdash_v$: $p(x) \vdash_v \forall x.p(x)$ אבל $p(x) \nvdash_t \forall x.p(x)$.
3. דוגמה נגדית המוכיחה שאם תורה היא **t-ספיקה היא לא בהכרח v-ספיקה**: $T = \{p(x) \wedge -p(y)\}$.
4. דוגמה נגדית המראה שאם $M \nvDash -A$ זה לא אומר ש-$M \vDash A$: $A = p(x, y) \wedge \exists x. -p(x, x)$.
   בדוגמה זו מוכיחים כי $\nvdash_v A$ אבל גם A לא v-ספיקה.
5. דוגמה נגדית המראה שעבור v-נביעה משפט הדדוקציה לא נכון: $p(x) \vdash_v \forall x p(x)$ אך $\nvdash_v p(x) \to \forall x p(x)$.
6. דוגמה נגדית המראה ש-T יכולה להיות ספיקה למרות שהסגור שלה לא: $T = \{p(x), -\forall y. p(y)\}$.
7. דוגמה נגדית לאי קיום משפט החלפת שקולים בt-נביעה: $(x = x) \leftrightarrow (x = 1) \vdash_t (x = x) \leftrightarrow (x = 1)$
   אבל $(x = x) \leftrightarrow (x = 1) \nvdash_t \forall x(x = x) \leftrightarrow \forall x(x = 1)$.
8. דוגמה נגדית לכך ש-A ו-Sk(A) לא שקולים (כי $\nvdash_{FOL} A \to Sk(A)$): $\nvdash_{FOL} \forall x \exists y(x < y) \to \forall x(x < f(x))$.
9. "אם פסוק ספיק ב-FOL (בשפה עם לפחות סימן קבוע אחד), אז יש לו מודל הרברנד" – דוגמה נגדית: נגדיר את הפסוק $\exists x(r(x) \wedge r(x))$. יש לפסוק זה מודל (עם D שמכיל יותר מ-2 איברים) אבל במבנה הרברנד (בו D מכיל רק איבר אחד – c), הפסוק אינו נכון.

10. פסוק הנכון בכל מבנה הרברנד אבל לא תקף לוגית (לא נכון בכל מבנה): סכמה של אינדוקציה $[p(c) \wedge \forall x\left(R(x) \to R\big(f(x)\big)\right)] \to \forall x R(x)$. במבנה כללי יש לפרש את c כ-5, f כעוקב ו-R כ->.

11. לפסוק שהוא ספיק אך אינו ספיק בכל מבנה סופי: $\forall x \forall y(f(x) = f(y) \to x = y) \wedge \exists z \forall y(-(f(y) = z))$.
    הדוגמה מצרינה בעצם פונקציה שהיא חח"ע אבל לא על. זה לא מתקיים במודל סופי.