אנליזה נומרית - שיעור 4

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\qquad f(\alpha)=0$

$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ $\qquad \underline{f}(\underline{\alpha})=\underline{0}$ $\qquad \underline{f}=\begin{pmatrix}f_1\\ \vdots\\ f_n\end{pmatrix}$

$\underline{X}=(x_1\dots x_n)$

$\underline{X}^{(0)}=(x_1^{(0)}\dots x_n^{(0)})$

$\Delta x=\underline{x}-\underline{x}^{(0)}$ $\qquad f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$

f דיפרנציאבילית, $X^{(0)}$ אם קיימים $\alpha_1\dots\alpha_n$:

$$\lim_{\|\Delta x\|\to 0}\frac{1}{\|\Delta \underline{x}\|}\cdot\Big[f(\underline{x})-f(\underline{x}^{(0)})-\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\cdot\Delta x_j\Big]=0$$

$$f(\underline{x})=f(\underline{x}^{(0)})+\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\cdot\Delta x_j+\phi(\Delta x)$$

ההפרש בין $f(x)-f(x^{(0)})$ נתון משהו לינארי ו- ϕ כמה שצריך קטן.

$$\phi=o(\|\Delta x\|)\iff\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\phi(\Delta \underline{x})}{\|\Delta \underline{x}\|}=0 \quad *$$

אם נבחר $\Delta x_j=0$ לכל j חוץ מאיבר אחד l.

אז:
$$f(x_1^{(0)}\dots x_l^{(0)}+\Delta x_l\dots x_n^{(0)})-f(x^{(0)})=\alpha_l\Delta x_l+\phi(\Delta x_l)$$

נחלק ב- Δx_l ונשאיף לאפס.

$$\frac{\partial f}{\partial x_l}=\lim\frac{f(x_1^{(0)}\dots x_l^{(0)}+\Delta x_l\dots x_n^{(0)})-f(x^{(0)})}{\Delta x_l}=\alpha_l+\lim\underbrace{\frac{\phi(\Delta x_l)}{\Delta x_l}}_{\to 0}$$

לפי *

סימון לנגזרת:

$$\frac{\partial f}{\partial x_l}\;;\;f_{x_l}\;;\;d_{x_l}f\;;\;f'_{x_l}$$

גרדיאנט f: $\nabla f=\begin{pmatrix}f_{x_1}\\ \vdots\\ f_{x_n}\end{pmatrix}$ וקטור הנגזרות החלקיות.

לכן נרשום:

$$f(\underline{x})=f(\underline{x}^{(0)})+\langle\nabla f,\Delta\underline{x}\rangle+o(\Delta\underline{x})$$

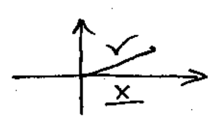
ולמעשה זה הנגזרת החלקית. מכפלה סקלרית

$$f(\underline{x})=f(\underline{x}^{(0)})+\nabla f^{T}\Delta\underline{x}+o(\Delta\underline{x}) \quad (**)$$

והנגזרת ...

נגזרת כיוונית $\|\underline{v}\|=1$.

$$f_{\underline{v}}:\ \frac{\partial f}{\partial \underline{v}}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(\underline{x}+\underline{v}\Delta t)-f(\underline{x})}{\Delta t}$$



אם f דיפרנציאבילית

כמו Δx ; x כמו $x^{(0)}$; (לפי **)

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(\underline{x}+\underline{v}\Delta t)-f(\underline{x})}{\Delta t}=$$

$\Delta\underline{x}=\underline{v}\Delta t$

$$=\lim\frac{\langle\nabla f,\underline{v}\rangle\cdot\Delta t}{\Delta t}+\lim\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}=\langle\nabla f,\underline{v}\rangle$$

(I) $\underline{v} = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$ $\qquad \langle \underline{a}, \underline{b} \rangle = \|a\| \cdot \|b\| \cdot \cos\theta$

$\theta = 0$
הכי גדול

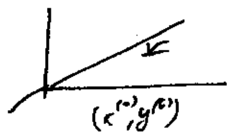
(II) $\underline{v} = -\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$ $\qquad \theta = \pi$
הכי קטן

(III) $\underline{v} \perp \nabla f \Longleftrightarrow \langle \nabla f, \underline{v} \rangle = 0$

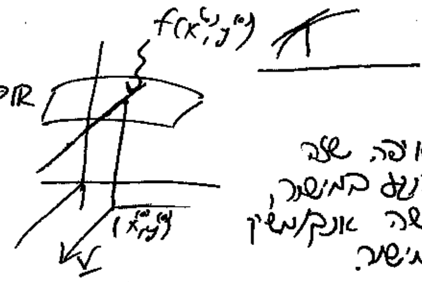
$\theta = 90°$ מאונכים זה לזה.

$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$

$(x_1^0, y_0) + \underline{v} \cdot \Delta t$



$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$



איפה שפוגש במישור, נעשה אנך/משיק למישור.

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k \qquad \underline{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_k \end{pmatrix}$

הגדרה: f דיפרנ' בנקודה $\underline{x}^0$ אם קיימת מטריצה J (יעקוביאן) כך ש:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\|\Delta x\|} [\underline{f}(\underline{x}) - \underline{f}(\underline{x}^{(0)}) - J \cdot \Delta x] = \underline{0}$$

f ממימד k.

$$\Longleftrightarrow \underline{f}(\underline{x}) = f(\underline{x}^{(0)}) + J \Delta \underline{x} + \underline{\phi}(\Delta \underline{x}) \qquad \underline{\phi} = o(\Delta x)$$

פונקציה דיפרנציאבילית אם כל אחד מרכיביה דיפרנציאבילי.

J ממימד k כי f ממימד k.

$$J = \begin{pmatrix} - \nabla f_1 - \\ - \nabla f_2 - \\ \vdots \\ - \nabla f_k - \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$ מטריצת Jacobian

אם כל הנגזרות החלקיות רציפות בסביבת $\underline{x}^{(0)}$ אז f דיפרנציאבילית בסביבת $\underline{x}^{(0)}$.

משפט הפונקציה הסתומה:

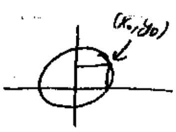
$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

נתון $f(\underline{x}^{(0)}) = c$ נתבונן ב-$\underline{x}$ בסביבת $\underline{x}^{(0)}$

שמקיימים $f(\underline{x}) = c$ דוגמא:

קשר בין x ל-y

$x^2 + y^2 = 1$



$x^{(0)2} + y^{(0)2} = 1$

השאלה היא: ניתן להציג לוקלית $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$

את x_n כפונקציה של $x_1 - x_{n-1}$.

משתנים

$$\underset{\substack{\shortparallel \\ c}}{f(\underline{x})} = \underset{\substack{\shortparallel \\ c}}{f(\underline{x}^{(0)})} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot \Delta x_j + o(\Delta \underline{x})$$

שארנו בערך שווה 0.

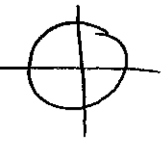
לכן נשארנו עם: $\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot \Delta x_j \approx 0$

$$\underbrace{(x_n - x_n^{(0)})}_{\Delta x_n} \approx \sum_{j=1}^{n-1} \frac{-\frac{\partial f}{\partial x_j}(\underline{x}^{(0)})}{\frac{\partial f}{\partial x_n}(\underline{x}^{(0)})} \cdot \underbrace{(x_j - x_j^{(0)})}_{\Delta x}$$

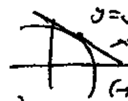
ואז נבודד את x_n ככה

דוגמה: מעגל היחידה

מצא את השיפוע בנק' $(x^0,y^0)=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$



$$y=+\sqrt{1-x^2}$$



השיפוע בנקודה: נגזרת לפי x:

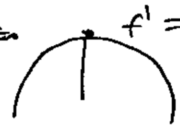
$$y_x=-\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}\Big|_{x=\frac{1}{\sqrt{2}}}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{2/\sqrt{2}}{\sqrt{1-\frac{1}{2}}}=(-1)$$

$$y_x=-\frac{f_x}{f_y}=-\frac{2x}{2y}\Big|_{(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)}=(-1)$$

$\boxed{x^2+y^2=1}$ לפי השיטה שלנו

$$f(x)=f(x^{(0)})+\langle\nabla f,\Delta x\rangle+\left[\Delta x^T\underbrace{\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n}\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_n}\end{pmatrix}}_{Hessian}\Delta x\right]+o(\|\Delta x^2\|)$$

בנקודת מקסימום כשהנגזרות שוות לאפס.



$f'=0$

$f''<0$

נראה שזה מקסימום

המכפלה הפנימית של $\langle\Delta x, H\Delta x\rangle$

אם הסדר השני >0 אז זה (נק' מינימום), אם הסדר השני <0 אז יהיה נק' מקסימום

מקסימום $\langle\Delta x, H\Delta x\rangle<0$ $\quad\forall\Delta x\neq 0$

מינימום $\langle\Delta x, H, \Delta x\rangle>0$ $\quad\forall\Delta x\neq 0$

משפט הפונקציה ההפוכה

$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n \qquad f(x_{(0)})=f_0$

$$(f-f_0)=f(x)-f(x^{(0)})\approx J(x-x^0)$$

בשביל ההפוכה: J^{-1}, J-ל

$$\Rightarrow x=x^0+J^{-1}\cdot(f-f^{(0)})=x^{(0)}+J^{-1}\cdot\Delta f$$

$$\boxed{x=x^{(0)}+J^{-1}\cdot\Delta f}$$

משפט קרמר:

$$(A_{adj})_{ij}=\det M_{ij}\cdot(-1)^{i+j}\qquad A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot A^T_{adj}$$

קצב ההתכנסות

אם יש לי פונקציה במספר מימדים, נרצה למצוא נק' קיצון. למעשה מתי $\nabla f=0$.

מציאת נק' קיצון (מציאת מקס') של f:

$\nabla f=0$

$F(x)=0$

1D ממד 1

לפי טיילור

$$f(\alpha)\approx \overset{0}{f(\alpha)}+f'(\alpha)\cdot\Delta x=f'(\alpha)\cdot(x-\alpha)$$

שיטת ניוטון: $q=f'(x_n)$

$$\alpha=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{q_n}$$

במספר מימדים:

$$f(\underline{x}) \approx \underbrace{f(\underline{\alpha})}_{0} + J(\alpha)\cdot\Delta x = J(\alpha)\cdot(x-\alpha)$$

$$\underline{\alpha} = \underline{x} - J^{-1}(\alpha)\cdot f(\underline{x})$$

קירוב: $$\underline{x}^{(n+1)} = x^{(n)} - J^{-1}(\underline{x}^{(n)})\cdot f(\underline{x}^{(n)})$$

$A\cdot\underline{x}=\underline{b} \iff \underline{x}=A^{-1}b$

אלגברה לינארית נומרית

- $A\cdot\underline{x}=\underline{b}$

ספרים:

numerical Linear Algebra
L. N. Tretethem
D. Bam III

Matrix Computations
G. Golub
C. F. Vanloan

המלצה: ספר באלגברה לינארית:
Linear Algebra and it's Applications
G. Strang (באתר שלו יש הרצאות ב-MIT)
gilbert

נורמה של וקטור: $\underline{x},\underline{y}\in\mathbb{R}^m\ (\mathbb{C}^m)$. נורמה היא פונקציה מהמרחב ($\mathbb{C}^m \in \mathbb{R}^m$)
ל-$\mathbb{R}$ המקיימת: $\|x\|=0 \iff \underline{x}=\underline{0}$: $\|x\|\geq 0$

אשמ"ש: $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$ $\quad \|x-y\|\geq\big|\|x\|-\|y\|\big|$

$\|\alpha\cdot\underline{x}\| = |\alpha|\cdot\|\underline{x}\|$

דוגמאות: $\|\underline{x}\|_1 = \sum_{j=1}^{n}|x_j|$

$$\|\underline{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}|x_j|^2}$$

לא בהכרח שלם. $p\geq 1$ $\quad \|\underline{x}\|_p = \sqrt[p]{\sum_{j=1}^{n}|x_j|^p}$ $\quad \|\underline{x}\|_\infty = \max_{j=1..m}|x_j|$

אי-שוויון קושי:

$$|\underline{x}^T\underline{y}| = |<\underline{x},\underline{y}>| \leq \|\underline{x}\|_2\cdot\|\underline{y}\|_2$$

אי-שוויון הלדר: Hölder

$$|\underline{x}^T\underline{y}| \leq \|\underline{x}\|_p\cdot\|\underline{y}\|_q \qquad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

שקילות של נורמות: הנורמות $\|\cdot\|_I$, $\|\cdot\|_{II}$. יקראו שקולות אם קיימים $C_1,C_2>0$ כך שלכל $\underline{x}\in S_{\text{תחום ערכים}}$ מתקיים: $C_1\cdot\|x\|_I \leq \|x\|_{II} \leq C_2\cdot\|x\|_I$

משפט:
נניח ש: $\|x^{(n)}\|_I\to\underline{0}$ אז גם $\|x^{(n)}\|_{II}\to\underline{0}$ ולהיפך.

לא כל הנורמות שקולות בכל מרחב.

ניקח מרחב סדרות אינסופי $S=\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$

$\|\underline{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty}|x_j|^2}$

כאשר נתבונן ב: $x_j=\frac{1}{j}$

לכן: $\|x_j\|_2 = \sqrt{\sum\left(\frac{1}{j}\right)^2} < \infty$ חסום!

לדוגמא באג הסגור: $\|x\|_1 = \sum_{j=1}^{\infty} \left|\frac{x_j}{j}\right|$ לא תקף!

לכן הנורמות לא שקולות. (במרחב הזה).

אם היינו לוקחים את מרחב הסדרות הסופיות $\{x_i\}_{i=1}^{N}$ אז הנורמות הסומות שתיהן.

- מעל מימד סופי, נורמה היא פונקציה רציפה $\|\underline{x}+\Delta\underline{x}\| \xrightarrow[\Delta x\to 0]{} \|\underline{x}\|$

משפט: כל הנורמות מעל מרחב ממימד סופי (Z) שקולות.

הוכחה: יהיו שתי נורמות: $\|\cdot\|_I, \|\cdot\|_{II}$

נסמן: הקבוצה $B_R = \{v \in Z \mid \|v\|_I = R\}$

קומפקטית ← בגלל שזו ספרה בתוך הקבוצה שהיא לעיל בתוך הקבוצה.

נגדיר: $\boxed{C_2} = \max_{v\in B_1} \|v\|_{II}$ נקח את כל הוקטורים $=B_1$ שהנורמה ה-I שלהם היא 1.

$C_1 = \min_{v\in B_1} \|v\|_{II}$

$u \in Z$

$\|u\|_I = \gamma$ (מספר)

$$\|u\|_{II} = \gamma\cdot\left\|\frac{u}{\gamma}\right\|_{II} = \|u\|_I\cdot\underbrace{\left\|\frac{u}{\|u\|_I}\right\|_{II}} \le C_2\cdot\|u\|_I$$

להכפיל ולחלק בקבוע.

נציב $\|u\|_I = \gamma$

$$\|u\|_{II} = \|u\|_I\cdot\underline{\left\|\frac{u}{\|u\|_I}\right\|_{II}} \ge C_1\cdot\|u\|_I$$

ולכן הנורמות שקולות