14.6.07
(1)

# אנליזה נומרית - תרגול אחרון

נמשיך מעט משהו שעבר ולאחר מכן ריבועים פחותים.

<u>תזכורת</u>: דיברנו על בעיית Minimax.

<u>משפט</u>:

$$\min_{X_k}\left\{\max_{x\in[-1,1]}\underbrace{\left|\prod_{k=0}^{N}(x-x_k)\right|}_{P(x)\in P_N}\right\} \underset{\text{לפי המשפט}}{=} 2^{1-N}$$

$$C_p \underset{\text{לפי המשפט}}{\Rightarrow} P(x)\in P_N$$

כאשר $C_p$ זה פולינום צ'בישב.

הנוסחה הרקורסיבית של צ'בישב:

$$T_0=1$$

$$T_1=x$$

$$T_{n+1}(x)=2xT_n-T_{n-1}$$
$$n>1$$

הגדרה טריגונומטרית:

$$T_n(x)=\cos(n\arccos x)$$

$$T_n(\cos x)=\cos(nx)$$

בעיקרון ה-$P$ הוא פולינום מנורמל, כלומר,

$$2^{n-1}P(x)=2^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}(x-x_k)=T_n$$

$$\max|T_n|=1$$

נורמת המקס' של $P$ $\rightarrow$ $P_{max}=\max\left|\frac{1}{2^{n-1}}T_n\right|=\frac{1}{2^{n-1}}$

<u>שאלה</u>: נניח כי $f(x)=e^x$ ונניח כי $x\in[-1,1]$ (א) רוצים למצוא חסם לשגיאת אינטרפולציה ריבועית.

(ב) השווה לגריד יוניפורמי (הכוונה לנקודות רק במרחק שווה ולא שורשי צ'בישב).

<u>פתרון</u>:

(א)

$$T_0=1\ ;\ T_1=x\ ;\ T_2=2x^2-1\ ;\ T_3=4x^3-3x$$

לפי הנוסחה של צ'בישב.

$$x_{0,1,2}=0,\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

נמצא את השגיאה:

$$E_3=\max\left|\frac{f'''(\xi(x))}{3!}\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right|\le$$

$$\le\frac{1}{3!}\cdot\max_{\xi\in[-1,1]}|f'''|\cdot\max_{x\in[-1,1]}\left|2^{-2}T_3(x)\right|=\frac{1}{6}\cdot e\cdot\frac{1}{4}=\frac{e}{24}\approx 0.1133$$

(ב) ניקח את הנקודות $0,\pm1$: (שוב אנו מחפשים את $P$ כך אחד ומוצאים רק מקסימום כדי לחסום).

$$P(x)=(x-1)x(x+1)=x(x^2-1)$$

$$P'=3x^2-1=0\ \Rightarrow\ x^*=\frac{1}{\sqrt{3}}\ \Rightarrow\ P_{max}=\frac{2}{3\sqrt{3}}\approx 0.38$$

$$\Rightarrow E_3=\frac{e}{6}\cdot\frac{2}{3\sqrt{3}}\approx 0.1743$$

ראינו קודם הגדרת טריגונומטרית של פולינום צ'בישב. ניתן לוודא כי השורשים שלו הם:

$$x = \cos\left(\frac{k+\frac{1}{2}}{n}\pi\right) \qquad k=0,\dots,n-1$$

אם יש לנו נקודה $z\in[a,b]$ ואנחנו רוצים להעתיק אותה לנק' $x\in[-1,1]$
אז מה שנעשה זה נגדיר את $z$ להיות קו ישר התלוי ב-$x$:

$$z(x) = \underbrace{\frac{a+b}{2}}_{\text{נסמן } M} + \underbrace{\frac{b-a}{2}}_{\text{נסמן } \frac{\Delta}{2}}x$$

ואז,

$$z(x) = M + \frac{\Delta}{2}x \Rightarrow x(z) = 2\cdot\frac{z-M}{\Delta}$$

עכשיו אם נרצה להגדיר את פולינום השגיאה בקטע החדש נקבל:

$$P(z) = \prod_{k=0}^{n-1}(z-z_k) = \prod_k\left\{\left(M+\frac{\Delta}{2}x\right)-\left(M+\frac{\Delta}{2}x_k\right)\right\} = \left(\frac{\Delta}{2}\right)^n\prod_k(x-x_k)$$

$$= \left(\frac{\Delta}{2}\right)^n\tilde{P}(x)$$

## קו ריבועים פחותים

נניח כי קיימת לנו איזושהי פונקציה. ואנחנו רוצים למצוא קו ישר המקרב את הפונ' עם מינימום שגיאה.

כלומר אנחנו רוצים למצוא: $g(x_i) = ax_i + b$,

למשל, נגדיר את הנק':

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 1 | 5.1 |
| 2 | 7.9 |
| 3 | 10.5 |
| 4 | 14.2 |

נעביר את הבעיה לבעיה דיסקרטית:

$$\vec{g} = a\phi_1 + b\phi_0 = a\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$$

נזכר במכפלה פנימית:

$$\langle\vec{r},\vec{g}\rangle = \sum_{i=1}^{n} r_i\cdot g_i$$

$$\|\vec{v}\|_2 = \sqrt{\langle\vec{v},\vec{v}\rangle} = \sqrt{\sum v_i^2}$$

אנו רוצים למזער את השגיאה:

$$e_v(x_i) = f(x_i) - g(x_i)$$

אנחנו מעוניינים להקטין אותה, נעשה זאת ע"י הקטנת הנורמה:

$$\|e\|_2^2 = \langle\vec{e}_v,\vec{e}_v\rangle = \sum_{i=1}^{4}(f_i-g_i)^2$$

ריבועים מינימלים

③

אנליזה נומרית - תרגיל שאלה 1

כדי למצוא את המינימום נצטרך לגזור, נשים לב כי נוכל להסתכל על השגיאה כך:

$$e_r(a,b) = f_i - (a x_i + b)$$

הסיבה ש-$e_r$ תלוי ב-$(a,b)$ כיוון ש-$f_i$ ו-$x_i$ נתונים.

לכן נחפש את $\nabla_{a,b}\, e_r^2$.

כלומר, אני רוצה למצוא:

$$0 = \partial_b e_r^2 = \partial_b \langle \vec{f}-\vec{g}, \vec{f}-\vec{g} \rangle = \partial_b \langle f - a\phi_1 - b\phi_0, f - a\phi_1 - b\phi_0 \rangle$$

כי מתאפס בגזירה לפי b.

$$= \partial_b \left\{ \cancel{\|f\|^2} + \cancel{a^2 \|\phi_1\|^2} + b^2 \|\phi_0\|^2 + 2ab \langle \phi_0, \phi_1 \rangle - 2b \langle \phi_0, f \rangle \cancel{+ 2a \langle f, \phi_1 \rangle} \right\}$$

(*) אם נגזור לפי b מצטמצם הביטויים שמחקנו!!! (*) ונקבל:

$$= 2b \|\phi_0\|^2 + 2a \langle \phi_0, \phi_1 \rangle - 2 \langle \phi_0, f \rangle$$

ונקבל (המשוואה שווה לאפס מההתחלה):

$$\langle \phi_0, f \rangle = b \langle \phi_0, \phi_0 \rangle + a \langle \phi_0, \phi_1 \rangle$$

אם נגזור לפי a (בנוסף) נקבל:

$$\langle \phi_1, f \rangle = b \langle \phi_1, \phi_0 \rangle + a \langle \phi_1, \phi_1 \rangle$$

קיבלנו מערכת משוואות:

$$M \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \phi_0, \phi_0 \rangle & \langle \phi_0, \phi_1 \rangle \\ \langle \phi_0, \phi_1 \rangle & \langle \phi_1, \phi_1 \rangle \end{bmatrix} X$$

$$X \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{matrix} \langle f, \phi_0 \rangle \\ \langle f, \phi_1 \rangle \end{matrix}$$

$$M_{ij} = \langle \phi_i, \phi_j \rangle \qquad \begin{matrix} a = 2.99 \\ b = 1.945 \end{matrix}$$

אם נרצה למצוא דיוק טוב יותר מזה נוכל לקחת בעיה שהמטריצה שמתקבלת לנו היא טובה, ככה לפתור את הבעיה, נבחר בבסיס אורתוגונלי. כלומר, הפתרון הוא תהליך גרם-שמידט.