24.09

(1)

אנליזה נומרית - תרגול 5

איטרציית נקודת השבת

$$f(x) = x^2 - 2 - 3 = (x+1)(x-3)$$

האיטרציה של פונקציה זו היא $g(x) = \frac{3}{x-2} = x$

* נשים לב שזו השוואת f ל-0 והעברת אגפים.. *\

אנחנו מתחילים ב $x_0 \in I = [-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}]$. בקטע זה יש את השורש -1.

קל לראות כי $-\frac{3}{2} \le \frac{3}{x-2} \le -0.5$ וכן כי $g' < \frac{1}{2}$.

אם נשנה את הקטע $I = [2.5, 4]$ נקבל כי $1.5 < \frac{3}{x-2} < 6$
וזה לא מקיים את תנאי משפט נק' השבת.

<u>נזכר:</u>

$$F(x+\delta) = f(x) + \delta f'(x) + \frac{\delta^2}{2} f''(x)$$

אנחנו רוצים לבנות איטרציה מהצורה הבאה:

$$g(x) = Ax + Br \cdot x^{-2} + Cr^2 x^{-5}$$

שתקרב את $(r \ne 0)$ $r^{\frac{1}{3}} = \bar{x}$, איך נשיג את סדר ההתכנסות הכי גבוה שניתן?

$$\begin{cases} g(r^{\frac{1}{3}}) = r^{\frac{1}{3}} \\ g'(r^{\frac{1}{3}}) = 0 \\ g''(r^{\frac{1}{3}}) = 0 \end{cases}$$

קיבלנו למעשה מערכת של 3 משוואות:

$$\begin{cases} Ar^{\frac{1}{3}} + \frac{Br}{r^{2/3}} + \frac{Cr^2}{r^{5/3}} = (A+B+C)\, r^{1/3} = r^{1/3} \\ A - 2B - 5C = 0 \\ 6B + 30C = 0 \end{cases}$$

* הצבנו את $r^{\frac{1}{3}}$
בכל אחת מהמשוואות
והשוונו לתוצאה שקיבלנו
מהמשפט הקודם *\

* אנו מצפים שההתכנסות תהיה לפחות מסדר שלישי, איך כדי לדעת מה הסדר האמיתי
צריך להמשיך ולגזור כדי להגיע לסדר האמיתי *\

<u>יעקוביאן ושיטת ניוטון רב מימדית</u>

נגדיר פונקציה

$$F(\vec{X}) = F(x,y) = \begin{pmatrix} e^{x^2} + y^2 - e \\ e^{x^2 - y^2} - 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} F_1 \\ F_2 \end{matrix}$$

$$J_f = \begin{pmatrix} - \nabla f_1 - \\ - \nabla f_2 - \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xe^{x^2+y^2} , & 2y e^{x^2+y^2} \\ 2x e^{x^2-y^2} , & -2y e^{x^2-y^2} \end{pmatrix}$$

אז אנחנו רוצים עכשיו לבנות ניוטון. ניתן להסתכל על יעקוביאן כנגזרת רב-מימדית ולכן
כך ליישם את טיילור

$$F(\vec{X}) \approx F(\vec{X}_0) + J_F^{(x)}(\vec{X}-\vec{X}_0)$$

$$f(0) \approx f(x_0) + \delta f'(x)$$

נסתכל על איטרציה:

$$(\vec{X}_{k+1} = \vec{X}_k + \delta\vec{X}_k)$$

$$F(\vec{X}_k + \delta x) = F(\vec{X}_k) + J_{F_k}(\delta\vec{X})_k$$

$$F(\vec{X}_k) \approx -J_{F_k}(\delta\vec{x})_k$$

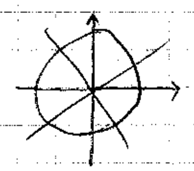
$$(\delta\vec{X})_k = -J_{F_k}^{-1}F(X_k)$$

קיבלנו שיטה איטרטיבית:

$$\boxed{\vec{X}_{k+1}} = \vec{X}_k + \delta\vec{X}_k = \boxed{\vec{X}_k - J_{F_k}^{-1}F(\vec{X})}$$

(כמו חלק בנגזרת)

נחזור לפונקציה שהגדרנו וננסה למצוא את השורש שלה:



השורש שאנחנו מחפשים הוא $\vec{X}^* = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$

נבחר $X_0 = \begin{pmatrix}0.1\\ 0.1\end{pmatrix}$ להיות X_0 בשביל השיטה ואנחנו נראה שזה
מתכנס תוך 5 איטרציות לקירוב טוב

נורמות

אני צריך נורמות כדי לאפשר השוואה בין וקטורים/מטריצות. הנורמה מגדירה גם (מבחינת)
מרחק של הוקטור וכו' כך ניתן להשוואה

(מרחק אוקלידי) $\quad \mathbb{R}^n \quad L_2 = \sqrt{\sum x_i^2} = \|X\|_2$

(נורמה נוספת) $\quad L_1 = \sum x_i = \|X\|_1$

$$L_\infty = \max|X_i| = \|X\|_\infty$$

הנורמות מקיימות מספר כללים:

1. הומוגניות $\quad \|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$
2. $\forall x \neq 0.\ \|x\| \neq 0$
3. $\|x_1 + x_2\| \leq \|x_1\| + \|x_2\|$

מכפלה פנימית מגדירה נורמה $\langle x, x\rangle = \|x\|^2$.

דוגמה: $\vec{V} = \begin{pmatrix}1\\ -2\\ 3\end{pmatrix}$

$$\|x\|_1 = 1 + 2 + 3 = 6$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$$

$$\|x\|_\infty = \max\{1,2,3\} = 3$$

2.4.09
3

שיעור (נורמה - תרגול) 5

נורמות מקיימות דבר חשוב של שקילות. אם קיימים α, β כך ש: $\alpha \|x\|_a \le \|x\|_b \le \beta \|x\|_a$
אז הנורמות שקולות.

למשל, ידוע כי $\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \sqrt{n}\, \|x\|_\infty \quad (x \in \mathbb{R}^n)$

במובנים השקילות אם ידוע לנו למשל כי $\|V_k\|_\infty \to 0$ אז גם: $\|V_k\|_2 \to 0$.

נורמה מושרית

לכל נורמה וקטורית ניתן להגדיר את הנורמה הבאה: $A^{n \times n} \to \max_{0 \ne \vec{v} \in \mathbb{R}^n} \left\{ \frac{\|A\vec{v}\|}{\|\vec{v}\|} \right\}$
(ההגדרה היותר כללית משתמשת ב sup במקום max).

(*) מה זה נותן לנו?

למשל, אם ידוע לנו כי $\delta y = A\delta x$

$$\|\delta y\| = \|A\delta x\| \le \|A\| \cdot \|\delta x\|$$

כיוון שנורמה מקיימת את אי שוויון המשולש אז גם מתקיים $\|\delta y\| = \|AB\delta x\| \le \|A\|\|B\|\|\delta x\|$

$$\|A\|_1 = \max_{\text{cols } j} \|A_{\downarrow j}\| = \max_j \sum_i |a_{ij}|$$

סכום העמודה המקסימלית במטריצה.

(כדי להוכיח שקילות ל $\frac{\|Av\|}{\|v\|}$, בכיוון אחד (קטן שווה) לוקחים מכפלה של וקטור במטריצה, בכיוון השני ניתן להראות שוויון)

$$\|A\|_\infty = \max_{\text{rows } i} \|A_{i \to}\| = \max_i \sum_j |a_{ij}|$$

(*) מתקיים השוויון הבא: $\|A\|_1 = \|A^T\|_\infty$.

<u>רדיוס ספקטרלי</u> - מסומן $\rho(A)$ ומוגדר $\rho(A) = \max_i |\lambda_i|$ כאשר λ_i הע"ע של A.

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A \cdot A^T)}$$

מתקיים תמיד כי... $\rho(A) \le \|A\|$

הוכחה בשנייה:

$$|\lambda|\, \|v\| = \|\lambda v\| \overset{\text{הגדרת ע"ע}}{=} \|Av\| \le \|A\| \cdot \|v\|$$

נחלק את שני האגפים ב $\|v\|$ ו(נקח) max.