1. הטענה <u>אינה</u> נכונה.

<u>הוכחה:</u> נשים לב תחילה כי φ ו- $Sk(\varphi)$ לא בהכרח שייכות לאותה השפה (הן שייכות לאותה השפה רק במקרה הטריוויאלי בו $\varphi = Sk(\varphi)$). לכן, אם היתה קיימת שקילות לוגית, היא היתה מתקיימת בשפה המורחבת L^* כיוון שבשפה המקורית L, ל- $Sk(\varphi)$ אין משמעות.

נראה דוגמה נגדית לטענה.

תהי L שפה מסדר ראשון מעל הסיגנטורה:

- סימני קבועים: אין.
- סימני פונקציות: אין.
- סימני יחסים: $=^2$.

תהי φ נוסחה ב- L כך ש- $\varphi \equiv \forall x.\exists y.=(x,y)$. אזי (נק"ב) כי $Sk(\varphi) \equiv \forall x.=(x,f(x))$ כאשר f הינו סימן פונקציה חד מקומי חדש בשפה L^*.

נניח בשלילה כי $\vdash_{FOL} \varphi \leftrightarrow Sk(\varphi)$ (כלומר φ ו- $Sk(\varphi)$ שקולות לוגית).

יהי $M = \langle I, D\rangle$ מבנה כך ש- $D = \mathbb{N}$, $I[=] = \{\langle a,a\rangle \mid a \in D\}$ ו- $I[f] = \lambda a.(a+1)$
(כלומר סימן היחס $=$ מציין את יחס השוויון וסימן הפונקציה f מייצג את פונ' העוקב).

תהי v השמה כלשהי. אזי לכל $a \in D$ מתקיים $M, v\{x:=a\}\{y:=a\} \models =(x,y)$
ולכן (עפ"י הגדרה) $M, v\{x:=a\} \models \exists y.(x,y)$ לכל $a \in D$, ומכאן כי $M,v \models \forall x \exists y.=(x,y)$

מאידך, $\langle a, \overset{I[f](a)}{\cancel{f(a)}}\rangle \notin I[=]$ ולכן $M, v\{x:=a\} \not\models =(x,f(x))$. ומכאן גם
כי $M,v \not\models \forall x.=(x.f(x))$.

סה"כ קיבלנו כי $M,v \models \forall x.\exists y.=(x,y)$ ו- $M,v \not\models \forall x.=(x,f(x))$.

לכן, $M,v \not\models \forall x.\exists y.=(x,y) \leftrightarrow \forall x.=(x,f(x))$ (ולכן $M \not\models \forall x.\exists y.=(x,y) \leftrightarrow \forall x.=(x,f(x))$)
ומכאן כי $\not\vdash_{FOL} \forall x.\exists y.=(x,y) \leftrightarrow \forall x.=(x,f(x))$ ולכן $\not\vdash_{FOL} \varphi \leftrightarrow Sk(\varphi)$
כלומר, φ ו- $Sk(\varphi)$ אינן שקולות לוגית.

מש"ל

2. א.

(i)

$(\forall x(p(x)\to \exists y.q(x,y)) \wedge \forall x(\neg p(x)\to\neg\exists y.q(x,y))) \equiv$

(α המרת) $\equiv (\forall x(p(x)\to\exists y.q(x,y)) \wedge \forall w(\neg p(w)\to\neg\exists z.q(w,z))) \equiv$

שקילות 6iii ושקילות 1 $\to \equiv (\forall x.\exists y.(p(x)\to q(x,y)) \wedge \forall w(\neg p(w)\to\forall z.\neg q(w,z))) \equiv$

שקילות 6iii $\to \equiv (\forall x.\exists y.(p(x)\to q(x,y)) \wedge \forall w.\forall z.(\neg p(w)\to\neg q(w,z))) \equiv$

$\equiv (\forall w.\forall z(\neg p(w)\to\neg q(w,z)) \wedge \forall x.\exists y.(p(x)\to q(x,y))) \equiv$

שקילות 6i $\to \equiv \forall x.\exists y.(\forall w.\forall z(\neg p(w)\to\neg q(w,z)) \wedge (p(x)\to q(x,y))) \equiv$

$\equiv \forall x.\exists y.((p(x)\to q(x,y)) \wedge \forall w.\forall z.(\neg p(w)\to\neg q(w,z)))$

שקילות 6i $\to \equiv \forall x.\exists y.\forall w.\forall z.((p(x)\to q(x,y))\wedge(\neg p(w)\to\neg q(w,z))) =_{def} \varphi_1$

(ii)

$\forall x(\forall y\exists z.p(x,y,z)) \to \forall x.r(x) \underset{\alpha \text{ המרת}}{\equiv} \forall x.(\forall y\exists z.p(x,y,z)) \to \forall w.r(w)$

שקילות 6iv $\to \equiv \exists x.\exists y.\forall z(p(x,y,z)\to\forall w.r(w)) \underset{\text{שקילות 6iii}}{\equiv} \exists x.\exists y.\forall z.\forall w(p(x,y,z)\to r(w)) =_{def}\varphi_2$

(iii)

$\forall x.\exists y.\forall z((\forall x.p(x)\to q(x,f(y),z)) \wedge \neg\forall z.\exists x.\neg r(q(x,z),z))$

α המרת $\to \equiv \forall x.\exists y.\forall z.((\forall w.p(w)\to q(x,f(y),z))\wedge\neg\forall s.\exists k.\neg r(q(k,s),s))$

שקילות 1 $\to \equiv \forall x.\exists y.\forall z.((\forall w.p(w)\to q(x,f(y),z))\wedge\exists s.\forall k.\neg\neg r(q(k,s),s))$

שקילות 6i $\equiv \forall x.\exists y.\forall z.\exists s.\forall k.((\forall w.p(w)\to q(x,f(y),z))\wedge\neg\neg r(q(k,s),s))$

$\equiv \forall x.\exists y\forall z.\exists s.\forall k(r(q(k,s),s)\wedge(\forall w.p(w)\to q(x,f(y),z)))$

שקילות 6iv $\to \equiv \forall x.\exists y.\forall z.\exists s.\forall k.(r(q(k,s),s)\wedge\exists w(p(w)\to q(x,f(y),z)))$

שקילות 6i $\to \equiv \forall x.\exists y.\forall z.\exists s.\forall k.\exists w.(r(q(k,s),s)\wedge(p(w)\to q(x,f(y),z)))$

$\equiv \forall x.\exists y.\forall z.\exists s.\forall k.\exists w.((p(w)\to q(x,f(y),z))\wedge r(q(k,s),s)) =_{def}\varphi_3$

ב.

(i) $Sk(\varphi_1)=\forall x.\forall w.\forall z.((p(x)\to q(x,f(x)))\wedge(\neg p(w)\to\neg q(w,z)))$ כאשר f הינו סימן פונקציה חדש.

(ii) $Sk(\varphi_2)=\forall z.\forall w(p(c_1,c_2,z)\to r(w))$ כאשר c_1,c_2 קבועים חדשים בשפה.

(iii) $Sk(\varphi_3)=\forall x.\forall z.\forall k.((p(g_1(x,z,k))\to q(x,f(g_2(x)),z))\wedge r(q(k,g_3(x,z)),g_3(x,z)))$ כאשר g_1,g_2,g_3 סימני פונקציה חדשים בשפה.

3.

(א) <u>תאור האלגוריתם:</u>

בהינתן נוסחה φ, נפעיל על הסגור של φ, $\forall\varphi$ את אלגוריתם הסקולמיזציה. נסמן את תוצאת הרצת האלגוריתם על $\forall\varphi$ ב-ψ.

נראה כי ψ ספיקה אמ"מ φ הוא v-ספיקה.

<u>טענת עזר:</u> φ v-ספיקה אמ"מ $\forall\varphi$ ספיקה.

<u>הוכחת טענה:</u> <u>הערה:</u> הכוונה בסימון $v\{x:=a\}$ כאשר $a\in D$ הינו להשמה v כך ש $v[x]=a$ (ואז $v[x]=v[a]$)

($\Leftarrow$) נניח כי φ היא v-ספיקה וכי $FV[\varphi]=\{x_1,\dots,x_n\}$, כיוון ש-$\varphi$ הוא v ספיקה, קיים מבנה M כך ש $M\models\varphi$. לכן, לכל השמה ולכל $a_i\in D$ $(i=1,\dots,n)$ מתקיים $M, v\{x_1:=a_1\}\{x_2:=a_2\}\dots\{x_n:=a_n\}\models\varphi$ ולכן (מהגדרה) נקבל כי לכל השמה v ולכל $a_i\in D$ $(i=1,\dots,n-1)$ מתקיים $M,v\{x_1:=a_1\}\dots\{x_{n-1}:=a_{n-1}\}\models\forall x_n.\varphi$ ומכאן כי לכל השמה v ולכל $a_i\in D$ $(i=1,\dots,n-2)$ מתקיים $M,v\{x_1:=a_1\}\dots\{x_{n-2}:=a_{n-2}\}\models\forall x_{n-1}\forall x_n.\varphi$ וכך הלאה. סה"כ נקבל כי $M,v\models\forall x_1\dots\forall x_n.\varphi$ לכל השמה v. ~~(ובפרט~~ קיימת ~~השמה כזו)~~, כלומר קיבלנו כי $M\cancel{v}\models\forall\varphi$ ולכן $\forall\varphi$ ספיקה.

($\Rightarrow$) נניח כי $\forall\varphi$ ספיקה וכי $FV[\varphi]=\{x_1,\dots,x_n\}$ אזי $\forall\varphi$ מהצורה $\forall x_1\dots\forall x_n.\varphi$. מכך ש $\forall\varphi$ ספיקה, קיים מבנה M כך שלכל השמה v מתקיים ~~כך~~ ש $M,v\models\forall x_1\dots\forall x_n.\varphi$. לכן, לפי הגדרה, לכל $a_1\in D$ מתקיים $M,v\{x_1:=a_1\}\models\forall x_2\dots\forall x_n.\varphi$, בצורה דומה לכל $a_1,a_2\in D$ מתקיים $M,v\{x_1:=a_1\}\{x_2:=a_2\}\models\forall x_3\dots\forall x_n\varphi$ וכך הלאה, סה"כ נקבל כי לכל $a_i\in D$ $M,v\{x_1:=a_1\}\dots\{x_n:=a_n\}\models\varphi$. כיוון שקבענו את הערכים של כל המשתנים החופשיים ב-φ (וכי הסיפוק מתקיים לכל $a_i\in D$) נקבל כי $M\models\varphi$, כלומר φ הינה v-ספיקה.

<u>הוכחת נכונות האלגוריתם:</u>

תהי φ נוסחה כלשהי. מטענת העזר קיבלנו כי φ v-ספיקה אמ"מ $\forall\varphi$ ספיקה. על $\forall\varphi$ אנו מפעילים את אלגוריתם הסקולמיזציה. מנכונות האלגוריתם $\forall\varphi$ ספיקה אמ"מ ψ (תוצאת הפעלת האלגוריתם) ספיקה.

בנוסף, נשים לב כי $\forall\varphi$ הינו פסוק ולכן הפעלת אלגוריתם הסקולמיזציה מוגדרת היטב. כמו כן, האלגוריתם מבטיח כי ψ המתקבל הינו פסוק אוניברסלי.

<u>משל</u> ☒

(ב) נפעיל את האלגוריתם על הנוסחה: (נמצא תחילה את הסגור של הנוסחה):

$$\varphi\equiv\forall x.\forall y\left[\forall z\exists u[[(P(x,y)\wedge\exists w.r(z,w,y))\to\forall v\, q(x,f(h(z)),v)]\wedge\forall w\forall v[\neg r(y,g(v),z)\vee P(h(w),u)]]\right]$$

לפי α →

$$\equiv\forall x\forall y\left[\forall z\exists u.[[(P(x,y)\wedge\exists w.r(z,w,y))\to\forall v.q(x,f(h(z)),v)]\wedge\forall k\forall t[\neg r(y,g(t),z)\vee P(h(k),u)]]\right]$$

$$\equiv\forall x\forall y.\forall z.\exists u[[\exists w(P(x,y)\wedge r(z,w,y))\to\forall v.q(x,f(h(z)),v)]\wedge\forall k\forall t[\neg r(y,g(t),z)\vee P(h(k),u)]]$$

$$\equiv\forall x\forall y\forall z\exists u[\forall w\forall v[(P(x,y)\wedge r(z,w,y))\to q(x,f(h(z)),v)]\wedge\forall k\forall t[\neg r(y,g(t),z)\vee P(h(k),u)]]$$

$$\equiv\forall x\forall y\forall z\exists u\forall w\forall v\forall k\forall t[[(P(x,y)\wedge r(z,w,y))\to q(x,f(h(z)),v)]\wedge[\neg r(y,g(t),z)\vee P(h(k),u)]]$$

$$\equiv\forall x\forall y\forall z\forall w\forall v\forall k\forall t[[(P(x,y)\wedge r(z,w,y))\to q(x,f(h(z)),v)]\wedge[\neg r(y,g(t),z)\vee P(h(k),l(x,y,z))]]$$

כאשר l הינו סימן פונקציה חדש.

4. <u>הוכחה:</u>

נראה כי מתקיים $\vdash_{FOL} \exists x(P(x)\vee Q(x)) \to \exists x.P(x) \vee \exists x.Q(x)$.

לפי משפט הדדוקציה, $\vdash_{FOL} \exists x(P(x)\vee Q(x)) \to \exists x.P(x) \vee \exists x.Q(x)$ אמ"מ $\exists x(P(x)\vee Q(x)) \vdash_{FOL} \exists x P(x) \vee \exists x.Q(x)$

נוכיח כי מתקיימת אמ"מ התורה $T=\{\exists x(P(x)\vee Q(x)), \neg(\exists x.P(x)\vee \exists x.Q(x))\}$ אינה ספיקה.

נמצא צורות פרנקסיות לנוסחאות T:

- $\exists x.(P(x)\vee Q(x)) \Rightarrow$ הנוסחה כבר בצורה פרנקסית
- $\neg(\exists x.P(x)\vee \exists x.Q(x)) \equiv \neg\exists x.P(x) \wedge \neg\exists x.Q(x) \equiv \forall x.\neg P(x) \wedge \forall x \neg Q(x) \underset{\text{כלל}}{\equiv}$

$\equiv \forall x.\neg P(x) \wedge \forall y.\neg Q(y) \equiv \forall x \forall y(\neg P(x) \wedge \neg Q(y)) \equiv \forall x \forall y.\neg(P(x)\vee Q(y))$

T אינה ספיקה אמ"מ $T_P = \{\exists x.(P(x)\vee Q(x)), \forall x\forall y\neg(P(x)\vee Q(y))\}$ אינה ספיקה.

T_P אינה ספיקה אמ"מ $Sk(T_P) = \{(P(c)\vee Q(c)), \forall x\forall y\neg(P(x)\vee Q(y))\}$ אינה ספיקה כאשר c הינו קבוע חדש בשפה.

לפי משפט הרברנד $Sk(T_P)$ אינה ספיקה אמ"מ T^*, הקבוצת האינסטנציות הסגורות של המטריצה של $Sk(T_P)$, אינה ספיקה.

נשים לב כי

$$T^* = \{P(c)\vee Q(c), \neg(P(c)\vee Q(c)), \dots\}$$

נשים לב ש T^* מכילה את הקבוצה $\{P(c)\vee Q(c), \neg(P(c)\vee Q(c))\}$ אשר אינה ספיקה ומכאן כי גם T^* אינה ספיקה.

קיבלנו כי T^* אינה ספיקה ולכן $\vdash_{FOL} \exists x(P(x)\vee Q(x)) \to \exists x.P(x) \vee \exists x.Q(x)$.

מש"ל ☒

.5

(א) נגדיר את הסיגנטורה: (תחת ההנחה שהסיגנטורה יכולה להכיל רק סימן יחס דו מקומי אחד יחיד).

- קבועים: אין.
- סימני פונק': אין.
- סימני יחס: r^2

הנוסחאות:

(i) $\forall x. \exists y. r(x,y)$

(ii) $\forall x. r(y,x) \to r(x,y)$

(iii) $\forall x \forall y\, r(x,y) \to (\forall z. r(y,z) \to r(x,z))$

(iv) $\forall x. r(x,x)$

(ב) נראה כי הטענה האחרונה נובעת משלוש הראשונות.

<u>הוכחה:</u>

עלינו להראות כי $\{\forall x \exists y\, r(x,y), \forall x. r(y,x) \to r(x,y), r(x,y) \to (\forall z. r(y,z) \to r(x,z))\} \vdash_{FOL} \forall x. r(x,x)$

נניח כי מתקיימת אמ"מ התורה $T = \{\forall x \exists y. r(x,y), \forall x. r(y,x) \to r(x,y), r(x,y) \to (\forall z. r(y,z) \to r(x,z)), \neg\forall x. r(x,x)\}$ אינה ספיקה.

נמצא צורה פרנקסית לנוסחאות שב-T:

- נוסחאות (i), (ii) כבר בצורה פרנקסית
- $r(x,y) \to (\forall z. r(y,z) \to r(x,z)) \equiv \forall z. r(x,y) \to (r(y,z) \to r(x,z))$
- $\neg\forall x. r(x,x) \equiv \exists x. \neg r(x,x)$

T אינה ספיקה אמ"מ $T_p = \{\forall x \exists y. r(x,y), \forall x. r(y,x) \to r(x,y), \forall z. r(x,y) \to (r(y,z) \to r(x,z)), \exists x. \neg r(x,x)\}$ אינה ספיקה.

T_p אינה ספיקה אמ"מ $Sk(T_p) = \{\forall x\, r(x, f(x)), \forall x. r(y,x) \to r(x,y), \forall z. r(x,y) \to (r(y,z) \to r(x,z)), \neg r(c,c)\}$ אינה ספיקה כאשר f הינו סימן יחס חדש ו-c הינו קבוע חדש בשפה.

לפי משפט הרברנד, $Sk(T_p)$ אינה ספיקה אמ"מ T^*, קבוצת הגרונדיזציות הסגורות של מסקנות הנוסחאות שב- $Sk(T_p)$, אינה ספיקה.

ושים לב כי

$$T^* = \{ \overbrace{r(c, f(c))}^{t}, \overbrace{r(c, f(c))}^{t} \to \overbrace{r(f(c), c)}^{t}, \overbrace{r(c, f(c))}^{t} \to (\overbrace{r(f(c), c)}^{t} \to \underbrace{\overbrace{r(c,c)), \neg r(c,c)}^{t}}_{\text{אינה ספיקה } T^*}, \ldots \}$$

קיבלנו כי T^* אינה ספיקה ולכן מתקיים נובעת מ הטענה האחרונה משלושת הטענות הראשונות.

מש"ל