אינטרפולציה

$\{\{x_i, y_i\}\}_{i=0}^{n}$

$P(x) \le n \quad ; \quad P(x_i) = y_i$

$P(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$

דוגמא: רוצים למצוא פולינום מהדרגה השניה שעובר את הטבלה הבאה.

x_i	y_i
1	3
2	2
4	1

$P(1) = c_0 + c_1 + c_2 = 3$

$P(2) = c_0 + 2c_1 + c_2 \cdot 4 = 2$

$P(3) = c_0 + c_1 4 + c_2 \cdot 16 = 1$

נמצא את הפתרון בעזרת מטריצת ונדרמונד (ר' מטלה):

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix}}_{V} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow c = \begin{pmatrix} \frac{13}{3} \\ -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix} \Rightarrow P(x) = \frac{13}{3} - \frac{3}{2}x + \frac{1}{6}x^2$$

קיומה ויחידות האינטרפולציה קבע, נמצא, באמצעות שיטה לגרנז':

$$\forall i,j \in \mathbb{Z} \;.\; \delta_{ij} \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

נמצא את L_1:

$L_1(1) = 1 \;;\; L_1(2) = L_1(4) = 0 \;\rightarrow\; \tilde{L}_1(x) = (x-2)(x-4)$

$\tilde{L}_1(2) = \tilde{L}_1(4) = 0 \;;\; \tilde{L}_1(1) = 3 \Rightarrow L_1 = \frac{\tilde{L}_1(x)}{\tilde{L}_1(1)}$

בצורה כללית נוכל לחשב את יתר ה-L:

$$L_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

$$L_1 = \frac{(x-2)(x-4)}{(1-2)(1-4)} \;;\; L_2 = \frac{(x-1)(x-4)}{(2-1)(2-4)} \;;\; L_3 = \frac{(x-1)(x-2)}{(4-1)(4-2)}$$

נשתמש בפרק L כדי למצוא את המקדמים:

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n=3} y_i L_i(x) \;;\; L_i(x) = 3L_1(x) + 2L_2(x) + 1 \cdot L_3(x) = \frac{13}{3} - \frac{3}{2}x + \frac{1}{6}x^2$$

קיבלנו את הפתרון, לא בהכרח היה ניתן לצפות מראש יחידות. הוכחה: נניח כי קיימים 2 פולינומים P ו- Q. שניהם מתלכדים ברשת x_i. לכן פולינום $P(x) - Q(x) = R$ קיימים $n+1$ שורשים. אם כיוון, דרגת $P - Q$ היא n לכן אם דרגת R היא n (לפי הנתון). קיבלנו ש- R מדרגה n שיש לו $n+1$ שורשים ולכן $R = 0$.

תרגיל: נתון פולינום $P(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x)$ ונקי $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$

הפולינום נמוך כי מצאנו התכלית לכך.

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot L_i(x) \quad (y_i = 1 \text{ לכל } i)$$

דרגת $P(x)$ היא n. קיים פולינום מדרגה $\le n$ שמתקיים $P(x) \equiv 1$.

שכבל הנקי היא שווה ל-1 ונצא $f(x) \equiv 1$. לכן, מיחידות $P(x) \equiv 1$.

14.5.09 ②

שגיאת האינטרפולציה - המשך

(נקודת אפס נוספת)

$e_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}}{(n+1)!}\prod_{j=0}^{n}(x-x_j)$ (נוסחת השגיאה) . ניתן לחשב את השגיאה רק כאשר ידוע לנו הערך המדויק של $f(x)$.

פולינום האינטרפולציה $p(x)$ של f הוא $p(x)=f(x)+e_{n+1}$.

נשים לב לכך, שכאשר הנגזרת ה-$n+1$ של f גדלה מאוד, גדל הגורם שלפני ה"ט. אגב, תאוריית הפולינומים $\prod(x-x_i)$ חשובה בקירוב.

דוגמא

$f_1 = \sin x \qquad f_2 = f_1 + \underbrace{10^{-20}\cdot\sin(1000x)}_{\text{רעש כלשהו}}$

ברור לנו כי $f_1^{(40)} = \sin x$, ולכן, גם $f_2^{(40)}$. אך עבור $n=39$, נסתכל על f_2. נגזור אותה, ונקבל:

$f_2^{(40)} = \sin x + 10^{-20}\cdot 10^{20}\cdot\sin(1000x) \approx 10^{100}\cdot\sin(1000x)$

כאשר לקח שיפוי בקרוב כתוצאה משגיאות עיגול מעלה, קיבלנו תוצאה הפוכה. לכן, המסקנה היא לא להשתמש בנוסחת שגיאה זו.

השיטה של ניוטון

x	$f(x)$
0	0
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1

$f(x) = \sin(x)$

c_0	c_1	c_2
$f(0) = 0$	$\frac{f(0)-f(\frac{\pi}{4})}{0-\frac{\pi}{4}} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$	$\frac{8(1-\sqrt{2})}{\pi^2}$
$f(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{f(\frac{\pi}{4})-f(\frac{\pi}{2})}{\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}} = \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\pi/4}$	
$f(\frac{\pi}{2}) = 1$		

נבנה באמצעות השיטה של ניוטון: c_2

$P(x) = c_0 + (x-x_0)c_1 + c_2(x-x_0)(x-x_1)$

$P_2(\frac{\pi}{3}) \approx 0.8502$

$E_2(\frac{\pi}{3}) = \left|\frac{\sin^{(3)}(c)}{3!}\left(\frac{\pi}{3}-0\right)\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right)\right| \le 0.024$ (השגיאה היא 0.0015)

$c\in(0,\frac{\pi}{2})$

$\left|\frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}\right|\prod(x-x_i)$

שגיאה מאפריורי:

$f([a,a+h]) \to \mathbb{R}$; $f\in C^2$

נרצה שגיאה שגודלה הוא: $E \le \frac{h^2}{8}\cdot\max f''$

$|E_1| = \left|\frac{f''(c)}{2!}\right|\cdot(x-a)(x-a-h) \le \frac{1}{2}\max_{c\in I} f''(c)\cdot\max\underbrace{(x-a)(x-a-h)}_{\frac{h^2}{4}}$

$(x-a)\cdot(x-a-h) = s(s-h) = (s-\frac{h}{2})^2 - \frac{h^2}{4} \in [-\frac{h^2}{4}, 0]$

$s\in[0,h]$

u.multinet.co.il