18.10.09

1

מד"ר 1 - שיעור 1

* השיעור מתחיל ב 12:10
* אסור לאכול בשיעור

פרופ' פנחס רבינוביץ'. יום ה' 13-14 שרייבר 206.

יהיה תרגיל הגשה כל שבוע הגשה (לשבועיים אחרי) יש ציון על התרגילים משקל ציון התרגילים יהיה 0. במקרה של הכרעה במקרים גבוליים, התרגילים ישפיעו.

מבחן: חלק מה"ס בבחינה יהיה דומה לתרגילים (גם לא ממש, כמעט ממש)

<u>ספרות בעברית</u>: פרופ' דוד לינדן / משוואות דיפרנציאליות ספר ישן (טיפה מיושן) אבל ספר טוב.

ד"ר דליה פישר וד"ר אלזה ברזי / מד"ר (בעיקר טוב לפתרון תרגילים)

בינלאומי: (1) Boyce Di Prime

Elementy D.E. and B.V. prob

(2) Edward & Pinney

Coddington

לא ברור למה תלמידי מדמ"ח לומדים את הקורס.

<u>קונבנציה</u>

$F(x,y,y',y'',\dots,y^{(n)})=0$ כאשר $y'=\frac{dy}{dx}$ היא משוואה דיפרנציאלית. אם קיימת $\phi=y(x)$
אזי הפתרון שלה

הדגש (x,y) ייתכן לעיתים בסימון (t,x) כאשר $x(t)$ והנגזרת תסומן $\dot{x}=\frac{dx(t)}{dt}$

הנגזרת הגבוהה ביותר ב-F נקראת <u>סדר</u> המשוואה (כלומר F היא מסדר n)
למשל במקרה ש-$n=3$ לא רק משוואות כמו $y'''(x)+y\cdot y'+y=0$ (שימו לב שהמשוואה
$(y'''(x))^2+y\cdot y'+y=0$ אז המשוואה היא <u>מדרגה</u> שנייה

<u>יצירת משוואה דיפרנציאלית רגילה</u>

נסתכל על הפונקציה $f(x,y,c_1,\dots,c_n)=0$ (A), לכל בחירה של ערכי c_i
אנחנו מקבלים פונקציה. כלומר ניתן להסתכל על (A) כמשפחה של פונקציות. ונתון תנאים
לגזירות שמאפשרים לכתוב כי הפתרון הוא משוואה דיפרנציאלית. נעשה גזירה לפי x
של n פעמים כדי להוריד את n המשתנים ונשאר רק עם קבועים.

$$\frac{df}{dx}+\frac{df}{dy}y'=0$$

$$\frac{d^2f}{d^2x}+2\frac{d''f}{\partial x\partial y}y'^2+\frac{df}{dy}y''=0$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^2f}{dx^n}+\cdots+\frac{df}{dy}y^{(n)}=0$$

$$y=\phi(x)$$

קיבלנו $n+1$ משוואות
מהם אנחנו מנסים לחלץ
n פרמטרים

אנחנו מקבלים משוואה $F(x,y,y',\dots,y^{(n)})=0$ (A)
שמגדירה את הקשר בין הפרמטרים

פתרון כללי (מלא) n קבועים השונים
מתאים אל הפונקציה של (A).

<u>הערה</u>: $f(x,y,\psi(a,b))=0$ אומנם יש 2 משתנים a,b אבל יש ביניהם קשר באמצעות ψ ולכן ניתן
לסמן אותם כפרמטר יחיד c.

18.10.09

②

מד"ר 1 - שיעור 1

דוגמה

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}=1$$

(a,b קבועים, λ היא המשתנה).

נגזור פעם אחת:

$$\frac{2x}{a^2+\lambda}+\frac{2y\cdot y'}{b^2+\lambda}=0$$

עכשיו ננסה לחלץ את λ משניהם

$$a^2+\lambda=\frac{x^2\cdot y'-xy}{y'}\quad , \quad b^2+\lambda=y^2-x\cdot y\cdot y'$$

ונחלץ λ:

$$\boxed{(a^2-b^2)=\frac{x^2y'-xy}{y'}-y^2+xy\cdot y'}$$

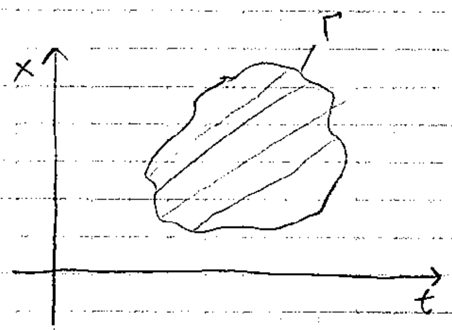
מד"ר מסדר ראשון (t,x)

$$(1)\ F(t,x,x')=0 \quad (\text{כאשר } x'=\tfrac{d}{dt}x(t))$$

$(t,x,x')\in B$. מניחים ש- F היא פונק' ידועה.

(1) לפונקציה $x=\varphi(t)$ נקרא פתרון של (1) בתחום $t\in(r_1,r_2)$ אם הצבתה ב- (1) הופכת לזהות.

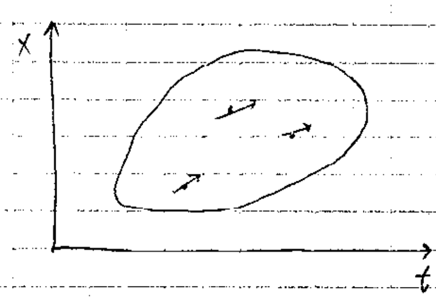
נוח יותר להסתכל על המד"ר (1) בצורה יותר מפורשת ע"י הצגה: $x'(t)=f(t,x)$ (2).



נניח שהפונקציה f מוגדרת בתחום Γ

הקווים מסמנים את גרף הפתרון (כלומר את ערכי הזוג $(t,\varphi(t))$ כתלות ב- t.

כשו מוגדרים למעשה הרבה של פתרונות (כל קו מסמן פתרון) אבל לפי משפט (שנלמד מיד) בכל (t_0,x_0) קיים רק פתרון אחד.



(22) בציור זה אנו מסמנים בכל נק' את השיפוע של F בנק' שלמעשה מוגדר באמצעות $f(t,x)$.

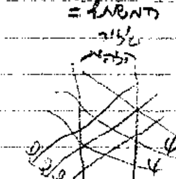
<u>משפט</u>: קיום ויחידות למד"ר מסדר ראשון:

תהי נתונה (*) $x'=f(t,x)$, נניח כי f מוגדרת בתחום מסוים Γ במישור (t,x):
נניח גם כי f ונגזרתה החלקית $\frac{df}{dx}$ הן פונקציות רציפות בכל התחום Γ.
אזי

(1) לכל נק' (t_0,x_0) של Γ קיים פתרון $x=\varphi(t)$ של מד"ר (*) המקיים את התנאי $\varphi(t_0)=x_0$ (**).

(2) אם שני הפתרונות $x=\varphi(t)$ ו- $x=\psi(t)$ של המד"ר (*) מקבלים אותו ערך ולו לערך אחד של $t=t_0$ (כלומר, $\psi(t_0)=\varphi(t_0)$) אזי שני הפתרונות שווים זה לזה, לכל ערכי t, שבו שניהם מוגדרים

תרגום הרכבה המשמעות = שלוב הלהטים



דוגמה:

$$\dot{X} = aX \qquad (a\in\mathbb{R})$$

$$f(t,x) = ax$$

ל- f יש נגזרת רציפה ולכן אנו נמצאים בתנאי משפט קיום ויחידות

$$X = c\cdot e^{at} \qquad (\text{קבוע } c)$$

לפי מה שנאמר ניתן למצוא c יחיד כך שהפתרון יעבור דרך נקודה, אם נבחר t_0, x_0 נקבל $c = x_0\cdot e^{-at_0}$ ונקבל $X = X_0 e^{a(t-t_0)}$. יתרה מזאת, אם נבחר $X=\psi(t)$ אזי $X_0=\psi(t_0)$

נסתכל על משוואת קצב הדעיכה $\dot{x} = -\beta x$ (כאשר x זה החומר שנשאר לנו, β מציין קצב התפרקות החומר ו- $\dot{x}$ הוא קצב הדעיכה).

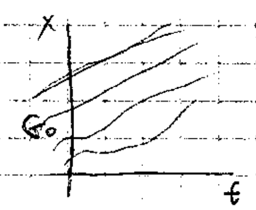
דוגמה:

$$\dot{X} = f(t)$$

נניח שמוגדר בתחום $t\in(r_1,r_2)$ ניתן להגדיר את האינטגרל:

$$G_0(t) = \int_{t_0}^{t} f(\tau)\,d\tau \quad \rightarrow \quad x(t) = G_0(t)+c$$
$$t_0\in(r_1,r_2)$$

בדרך מקוצרת נרשום $\frac{dx}{dt} = f(t)$, $x = \int f(t)dt$

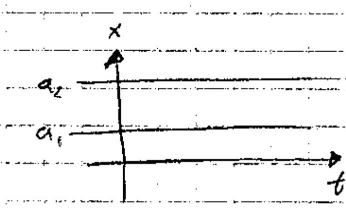


דוגמה:

$$\dot{X} = g(x)$$

(1) $X\in(a_1,a_2)$

(2) יש נגזרת ראשונה רציפה בתחום ל- g



$$G_0 = \int_{x_0}^{x} \frac{d\tau}{g(\tau)} \Rightarrow G_0(x) = t+c$$

$$\frac{dx}{dt} = g(x)$$

$$\int\frac{dx}{g(x)\,dt} = \int 1\cdot dt = t+c$$

$$\int\frac{dx}{g(x)} = t+c \ \ldots\ldots$$

מד״ר 1 - שיעור 1

דוגמה:

$$\dot{x} = f(t)\cdot g(x) \qquad t\in(r_1,r_2),\ x\in(a_1,a_2)$$

$$\frac{dx}{dt} \underset{\uparrow}{=} \frac{dx}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = f(t)\cdot g(t)$$

משפט

של כלל השרשרת

$$\frac{d\tau}{dt} = f(t) \rightarrow \tau = \int_{t_0}^{t} f(\xi)\,d\xi$$

$$\frac{dx}{d\tau} = g(x)$$

$$\int\frac{dx}{g(x)} = \tau + c = \int_{t_0}^{t} f(\xi)\,d\xi + c$$

(a)

דוגמה:

$$\dot{x} = x^2 \qquad \frac{dx}{dt} = x^2 \qquad \int\frac{dx}{x^2} = \int dt \Rightarrow -\frac{1}{x} = t + c$$

$$\begin{pmatrix} x=1 \\ t=1 \end{pmatrix} \quad x = \frac{-1}{t}$$

(b) $\dot{x} = \frac{2}{t^2-1}$

כאן, אנו רואים יש שתי נק׳ ±1 יש בעיה ולכן צריך לחלק ל-3 תחומים שונים

$$\frac{2}{t^2-1} = \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}$$

נחלק את תחום האינטגרציה ל-3 פסים $t<-1$, $t>1$, $-1<t<1$

$$x = \int\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)dt = \ln|t-1| - \ln|t+1| + c \Rightarrow x = \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + c$$