סטטיסטיקה למדעי המחשב – פתרון תרגיל 8

.1

א. השערת האפס היא שהאדם הוא אנגלי, האלטרנטיבה היא שהאדם אינו אנגלי וסטטיסטי המבחן הוא המשקה שהאדם מזמין.

ב.

i.

P(יעדיף וויסקי או בירה | אנגלי) = P(וויסקי | אנגלי) + P(בירה | אנגלי)
= 0.1 + 0.2 = **0.3**

ii.

P(ברנדי | אנגלי) = **0.2**

ג.

i.

P(יעדיף יין או ברנדי | צרפתי) = P(יין | צרפתי) + P(ברנדי | צרפתי)
= 0.6 + 0.2 = **0.8**

ii.

P(יין או וויסקי או בירה | צרפתי) =
P(יין | צרפתי) + P(וויסקי | צרפתי) + P(בירה | צרפתי) =
0.6 + 0.1 + 0.1 = **0.8**

ד. במקרה של טעות מסוג שני (False Negative), שני הפאבים טועים בהסתברות זהה. לעומת זאת, במקרה של דחיית ההשערה בטעות, פאב B טועה בסיכוי נמוך יותר. לכן נסיק כי פאב B מזהה טוב יותר מוצאו של אדם.

ה. כמות המבחנים הינה ככמות צירופי המשקאות שנוכל ליצור. קיימים 4 משקאות, כל משקה יכול להופיע או לא להופיע (2 אפשרויות) ולכן סה"כ נקבל $2^4=16$ מבחנים. נשים לב שהמקרה בו אדם מעדיף כל אחד מ-4 המשקאות הוא גם מבחן לגיטימי (כיוון שייתכן ובריטים אינם שותים כלל). בצורה דומה, ייתכן גם ההפך (שצרפתים אינם שותים כלל) ולכן גם המבחן בו הגיע אדם לפאב ולא הזמין אף משקה (אולי הוא הגיע בשביל המוזיקה) הוא מבחן לגיטימי.

.2 $X\sim N(\mu,\rho^2)$ כאשר השונות ידועה. השערות האפס על התוחלת זהות ורמת המובהקות זהה גם כן. לחוקר א' מדגם בגודל 100 ולחוקר ב' מדגם בגודל 200.

א. חוקר א' דחה את H_0.

i. במקרה שהאלטרנטיבות אינן זהות, לא נוכל לדעת מה יחליט חוקר ב'. הסיבה לכך היא שייתכן והאלטרנטיבה של חוקר א' היא תוחלת הגדולה מהתוחלת בהשערת ה-0 והאלטרנטיבה של חוקר ב' היא תוחלת הקטנה מהשערת ה-0 (או להפך). במקרה כזה, אזורי הדחייה הפוכים ולכן כיוון שתוצאות החוקרים הן זהות, חוקר ב' לא יוכל לדחות את השערת ה-0.

ii. כיוון שהאלטרנטיבות זהות, הפרמטר היחיד המבדיל בין החוקרים הוא גודל המדגם. ע"פ הנוסחה של הערך הקריטי, מדגם גדול יותר מרחיב את אזור הדחייה. לכן, כיוון שלחוקר ב' היה מדגם גדול יותר, איזור הדחייה שלו גדול יותר. היות ושני החוקרים קיבלו תוצאות זהות וההשערה האלטרנטיבית הייתה זהה, חוקר ב' ידחה את השערת ה-0 בוודאות.

ב. חוקר א' לא דחה את H_0.

i. במקרה שהאלטרנטיבות אינן זהות, לא נוכל לדעת מה יחליט חוקר ב'. זהו עשוי להיות מקרה הפוך לזה שתיארתי בסעיף א' i. כאמור, ייתכן והאלטרנטיבה של חוקר א' היא תוחלת הגדולה מהתוחלת בהשערת ה-0 והאלטרנטיבה של חוקר ב' היא תוחלת הקטנה מהשערת ה-0 (או להפך). במקרה כזה, אזורי הדחייה הפוכים ולכן כיוון שתוצאות החוקרים הן זהות, חוקר ב' יוכל לדחות את השערת ה-0.

ii. גם כאשר האלטרנטיבות זהות, אין וודאות לגבי החלטת חוקר ב'. הסיבה לכך היא שלחוקר ב' יש מדגם גדול יותר ולכן, אזור הדחייה שלו גדול יותר. במקרה כזה, ייתכן ואזור הדחייה גדל מספיק כך שיהיה ניתן לדחות את השערת ה-0 אך ייתכן שגם לא.

3.

א.

i. ננסה לבדוק את כמות הגשמים הממוצעת. השערת ה-0 תהיה שכמות הגשמים נשארה כמו שהיא, כלומר $H_0: \mu=800$. ההשערה האלטרנטיבית היא שכמות הגשמים עלתה, כלומר $H_A: \mu>800$.

ii. סטטיסטי המבחן יהיה ממוצע כמות הגשמים השנתית.

iii. (*) ע"פ ההשארה האלטרנטיבית, כיוון אזור הדחייה יהיה עבור ערכים גדולים. כלומר, יהיה מהצורה $R=[c,\infty)$. נמצא את הערך הקריטי עבור רמת מובהקות 0.05:

$$c=\mu_{H_0}+t_{n-1,1-\alpha}\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}=800+1.833\cdot\frac{16.37104}{\sqrt{10}}=\ \mathbf{809.4894}$$

iv. ממוצע המדגם הינו 793.3. לכן, המסקנה היא כי לא ניתן לשלול את ההנחה שכמות הגשמים נשארה כשהייתה (כאשר האלטרנטיבה היא שכמות הגשמים גדלה).

ב.

i. ננסה לבדוק את כמות הגשמים הממוצעת. השערת ה-0 תהיה שכמות הגשמים נשארה כמו שהיא, כלומר $H_0: \mu=800$. ההשערה האלטרנטיבית היא שכמות הגשמים השתנתה, כלומר $H_A: \mu\neq800$.

ii. סטטיסטי המבחן יהיה ממוצע כמות הגשמים השנתית.

iii. (*) ע"פ ההשארה האלטרנטיבית, כיוון אזור הדחייה יהיה עבור ערכים גדולים מאוד או קטנים מאוד. כלומר, יהיה מהצורה $R=(\infty,c_1]\cup[c_2,\infty)$. נמצא את הערכים הקריטיים עבור רמת מובהקות 0.05:

$$c_1=\mu_{H_0}+t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}=800-2.262\cdot\frac{16.37104}{\sqrt{10}}=\ \mathbf{788.2897}$$
$$c_2=\mu_{H_0}+t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}=800+2.262\cdot\frac{16.37104}{\sqrt{10}}=\ \mathbf{811.7103}$$

iv. ממוצע המדגם הינו 793.3. לכן, המסקנה היא כי לא ניתן לשלול את ההנחה שכמות הגשמים נשארה כשהייתה.

ג. נחשב רווח סמך ברמה של 99% עבור כמות הגשמים. רמת המובהקות היא 99% ולכן $1-\alpha=0.99$, נקבל כי $\alpha=0.01$.

$$\mu \pm t_{9,0.995}\cdot\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} = 793.3 \pm 3.25\cdot\frac{16.37104}{\sqrt{10}} \Rightarrow [\mathbf{776.4748}, \mathbf{810.1252}]$$

4. תחילה נשים לב שסכום הנתונים מתפלג בינומית עם פרמטר p . נוכל לקרב את התפלגות הממוצע להתפלגות נורמאלית $\bar{X}_i \sim N(p,\frac{p(1-p)}{n})$.

א. השערת ה-0 שלנו היא שמחצית מהאנשים מבקרים באופן קבוע אצל רופא שיניים. לכן נגדיר H_0: p=0.5. כיוון שאנו מניחים שאחוז האנשים שמבקרים אצל רופא שיניים קטן מחצי נגיד H_A: p<0.5.

ב. אזור הדחייה הוא עבור ערכים נמוכים ולכן יהיה מצורה $R=(-\infty,c]$. נחשב את הערך הקריטי c באמצעות הנוסחה עם אומד לשנות:

$$c=\hat{p}-Z_{0.99}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}=0.5-2.326\cdot\sqrt{\frac{0.5\cdot 0.5}{144}}=0.5-0.0969=0.403$$

נחשב אומד ל-p ע"פ נתוני המדגם: $\hat{P}=\frac{60}{144}=0.416$. האומד לא נמצא באזור הדחייה ולכן לא ניתן לדחות את טענת הרופאים.

ג. נמצא רווח סמך על פי הנתונים. רמת המובהקות היא 80% ולכן $1-\alpha=0.8$, נקבל כי $\alpha=0.2$.

רווח סמך עם אומד לשנות (רגיל):

$$\hat{p}\pm Z_{1-\frac{0.2}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}=0.416\pm 1.282\sqrt{\frac{0.416\cdot 0.584}{144}}=0.416\pm 0.052\Rightarrow[\mathbf{0.364},\mathbf{0.469}]$$

רווח סמך עם שנות חסומה (שמרני):

$$\hat{p}\pm Z_{1-\frac{0.1}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}=0.416\pm 1.282\sqrt{\frac{0.5\cdot 0.5}{144}}=0.416\pm 0.053\Rightarrow[\mathbf{0.363},\mathbf{0.470}]$$

5. X~N(40,196) משקל הביצים ללא הטיפול
Y~N(43.5,196) משקל הביצים לאחר הטיפול

א. נגיד את השערת האפס להיות "הטיפול לא השפיע על גודל הביצים". לפיכך נגדיר H_0: μ=40. לכן, ההשערה האלטרנטיבית תהיה H_A: μ>40. אזור הדחייה יהיה עבור ערכים גדולים ולכן יהיה מהתבנית R=[c,∞). נמצא את הערך הקריטי עבור רמת מובהקות 0.04: $C_{0.04}=40+1.75\frac{14}{\sqrt{15}}=\mathbf{46.3258}$.
ערך המדגם אינו באזור הדחייה ולכן לא ניתן לשלול את השערת ה-0. כלומר, לא ניתן לשלול שהטיפול לא השפיע על גודל הביצים.

ב. נמצא רווח סמך על פי הנתונים. רמת המובהקות היא 97% ולכן $1-\alpha=0.97$, נקבל כי $\alpha=0.03$.

רווח סמך למשקל הביצה בעקבות הטיפול:

$$\bar{Y}\pm Z_{1-\frac{0.03}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=43.5\pm 2.17\cdot\frac{14}{\sqrt{15}}=43.5\pm 7.844\Rightarrow[\mathbf{35.656},\mathbf{51.344}]$$

6. נגדיר את השערת ה-0 להיות "המכונה כוילה כראוי". כלומר, $H_0: \mu=5$. אם המכונה לא כוילה כראוי, גודל הברגים יהיה גדול/קטן מ-5. לכן, נגדיר את ההשערה האלטרנטיבית להיות $H_A: \mu\neq5$. לפיכך איזור הדחייה יהיה מתבנית $R=(-\infty, c_1]\cup[c_2, \infty)$. נגדיר את ממוצע המדגם להיות סטטיסטי המבחן ונניח כי קוטרי הברגים מתפלגים נורמאלית עם השונות הנתונה. נחשב את הערכים הקריטיים:

רמת מובהקות 0.05:

$$c_1 = \mu_0 - Z_{1-\frac{0.05}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 5 - 1.96 \cdot \frac{0.5}{10} = 4.902$$
$$c_2 = \mu_0 + Z_{1-\frac{0.05}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 5 + 1.96 \cdot \frac{0.5}{10} = 5.098$$

ברמת מובהקות זו, אזור הדחייה הוא $R=(-\infty, 4.902]\cup[5.098, \infty)$. לכן, אם ממוצע המדגם יהיה גדול מ-5.098 או קטן מ-4.902 יוכל בעל המפעל לדעת שהמכונה לא כוילה כראוי.

רמת מובהקות 0.10:

$$c_1 = \mu_0 - Z_{1-\frac{0.1}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 5 - 1.645 \cdot \frac{0.5}{10} = 4.91775$$
$$c_2 = \mu_0 + Z_{1-\frac{0.1}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 5 + 1.645 \cdot \frac{0.5}{10} = 5.08225$$

ברמת מובהקות זו, אזור הדחייה הוא $R=(-\infty, 4.91775]\cup[5.08225, \infty)$. לכן, אם ממוצע המדגם יהיה גדול מ-5.08225 או קטן מ-4.91775 יוכל בעל המפעל לדעת שהמכונה לא כוילה כראוי.