עידן דויטש
u.multinet.co.il

מודלים חישוביים – פתרון תרגיל 4

1. הוכח או הפרך: NP=coNP אמ"מ קיימת בעיה ב-NP-complete(NPC) שהיא גם coNP.

פתרון: זו טענה נכונה.

הוכחה:
$\Leftarrow$ נניח NP=coNP ונראה כי קיימת בעיה בNPC שהיא גם coNP.
תהי בעיה $B \in NPC$ (קיימת כזו. ראינו דוגמאות בכיתה לבעיות NP שלמות וההנחה אינה סותרת דוגמאות אלו). כיוון ש$B \in NPC$ בפרט מתקיים כי $B \in NP$. היות וע"פ ההנחה NP=coNP, נקבל כי $B \in coNP$ כנדרש.

$\Rightarrow$ נניח שקיימת בעיה B בNPC שהיא גם coNP ונראה כי NP=coNP.
$\boldsymbol{NP \subseteq coNP}$ - ע"פ הגדרה של NPC, לכל בעיה $C \in NP$ קיימת רדוקציה $C \leq_p B$. היות וע"פ ההנחה מתקיים גם כי $B \in coNP$, נקבל כי גם $C \in coNP$ כנדרש.
$\boldsymbol{coNP \subseteq NP}$ - תהי בעיה $C \in coNP$. כיוון ש$C \in coNP$ נקבל כי $\bar{C} \in NP$. ע"פ הגדרה של NPC, לכל בעיה בNP קיימת רדוקציה מB. לכן מתקיים $\bar{C} \leq_p B$. היות וע"פ ההנחה מתקיים גם כי $B \in coNP$, נקבל כי גם $\bar{C} \in coNP$ ומכאן כי $C \in NP$ כנדרש.

2.

א. הוכח או הפרך: $Halt \in NP-Hard$.

פתרון: הטענה נכונה.

הוכחה:
נראה כי לכל בעיה A ב-NP יש רדוקציה פולינומית לHalt. נראה זאת באמצעות רדוקציה פולינומית מSAT. נזכור שכיוון ש-SAT נמצאת בNP, קיים מוודא Ver_{SAT} הבודק כל "רמז" בזמן פולינומי. נגדיר את פונקצית מיפוי F כך: הפונקציה תקבל נוסחה φ ותחזיר <u>פונקציה G</u> שתפעל כך: G תרוץ בלולאה על כל אפשרויות ההצבה בליטרלים שבנוסחה φ. הריצה על כל האפשרויות תתבצע ע"י ספירה שלב הראשון של כמות הליטרלים בנוסחה ו"ייצור" הצבה בכל פעולה של הלולאה בשיטה של מונה בינארי (לדוגמה 0000 יסמן שכל הליטרלים הם F, לאחר מכן נבדוק את 0001 וכך הלאה). אם בשלב מסוים בדיקת רמז כלשהו תחזיר T, נעצור את G. אם נסיים לעבור על כל האפשרויות להצבה ובאף אחת לא קיבלנו T, G תכנס ללולאה אינסופית. נשים לב שאין אנו מפעילים את G אלא רק כותבים את "הקוד" שלה ומעבירים אותה אל Halt.

הוכחת נכונות:
עבור כל נוסחה φ שנעביר ל- F תוחזר פונקציה G. כאשר מריצים את G, הפונקציה עוברת על כל ההצבות האפשריות לφ . לכן, במידה ול-φ יש הצבה שמספקת אותה, G בוודאות תבדוק אותה, Ver_{SAT} יחזיר T ו-G תעצור. לכן במקרה זה, Halt תחזיר T כנדרש (כי G עוצרת). אם אין לφ פיתרון, עבור כל הצבה אפשרית לφ יוחזר מ-Ver_{SAT} הערך F ולכן בתום בדיקת כל הקלטים האפשרים G תכנס ללולאה אינסופית. מכאן שבמקרה זה Halt תחזיר F כנדרש.
ראינו אם כן כי קיימת רדוקצית מיפוי מSAT לHalt. SAT היא בעיה NP שלמה ובפרט NP חזקה. לכן, רדוקציה ממנה לHalt מעידה על כך שגם Halt היא NP חזקה.

סבוכיות:
נשים לב שאין אנו מפעילים את G אלא רק כותבים את "הקוד" שלה ואותו מעבירים כתוכנית לHalt. כתיבת הקוד דורשת מעבר על הנוסחה וספירת כמות הליטרלים (מתבצע בזמן לנארי). שאר הקוד אינו תלוי בגודל הקלט וניתן לכתוב אותו מראש (לולאה פשוטה). לכן, סבוכיות F היא פולינומית כנדרש.

ב. האם $Halt \in NPC$?

פתרון: לא.

הוכחה:
Halt אומנם שייכת ל-NP-Hard אך כדי להיות NPC, עליה להיות שייכת גם ל-NP. ראינו בשיעורים הקודמים ש$Halt \in RE/R$. כלומר, Halt היא בעיה החשיבה למחצה ואינה חשיבה. נשים לב כי $NP \subseteq EXP \subseteq R$. כיוון ש- $Halt \notin R$ נקבל כפעול יוצא שבפרט $Halt \notin NP$ ומכאן גם ש- $Halt \notin NPC$.

3.

א. **קלט:** φ נוסחה מסוג 3-CNF
שאלה: האם קיימת הצבה מספקת כך ש2008 ליטרלים בדיוק הם T והיתר F?

פתרון: בעיה זו היא ב-P.

הוכחה:
נתאר אלגוריתם פולינומי לפתרון הבעיה: מספר הליטרלים בכל נוסחה הוא מספר סופי. לכן, במידה וקיימים פחות מ-2008 ליטרלים נחזיר ישר F. אחרת עבור כל הצבה אפשרית נבדוק האם היא מספקת את הנוסחה. אם כן, נחזיר T, אם לא נעבור להצבה הבאה. אם סיימנו לבדוק את כל ההצבות האפשריות תחת המגבלות, נחזיר F.

הוכחת נכונות:
אם קיימים פחות מ-2008 ליטרלים בנוסחה, הרי שלא קיימת נוסחה בה 2008 ליטרלים הם T (והיתר F), פשוט כי לא קיימים מספיק ליטרלים. לכן התשובה במקרה זה תהיה F וזו גם התשובה שאנו מחזירים. במידה וקיימים יותר מ-2008 ליטרלים, אנו עוברים על כל האפשרויות. אם קיימת אפשרות שמספקת את הנוסחה, כאשר נבדוק אותה נחזיר T כנדרש. אחרת, בשום שלב לא נקבל T ולכן לאחר בדיקת כל האפשרויות נחזיר F כנדרש. נשים לב שהאלגוריתם רץ על מספר סופי של בדיקות ולכן בטוח יעצור.

סבוכיות:
נסמן ב-n את מספר הליטרלים. ספירת כמות הליטרלים מתבצעת בזמן ליניארי. ראינו בשיעור שבמידה וקיימת הצבה כלשהי, נוכל לבדוק האם היא מספקת בזמן פולינומי (בהתאם למודל החישובי. נניח $O(n^c)$). מספר ההצבות האפשרויות תחת המגבלות הוא $\binom{n}{2008} = \frac{n!}{2008!(n-2008)!} = O(n^{2008})$. כלומר, בדיקת כל האפשרויות תתבצע בסבוכיות ~ $O(n^{2008+c})$. סה"כ קיבלנו כי האלגוריתם מתבצע בזמן פולינומי כנדרש.

ב. **קלט:** φ נוסחה מסוג 3-CNF
שאלה: האם קיימת הצבה המספקת את φ כך שמחצית מהליטרים הם T?

פתרון: בעיה זו היא ב-NPC.

הוכחה:

i. נראה כי הבעיה ב-NP: בהינתן הצבה לליטרלים נספור תחילה את כמות הליטרלים בהם הצבנו T. אם לא מתקיים כי מחצית מהליטרלים הם T, נחזיר F. אחרת נבדוק שהצבה זו אכן מספקת את הנוסחה. אם כן, נחזיר T ואחרת נחזיר F. ספירת הליטרלים שבהם ההצבה היא T מתבצעת בזמן לינארי. בדיקה האם ההצבה מספקת את הנוסחה מתבצעת בזמן פולינומי (בדומה ל-3SAT). סה"כ קיבלנו שבדיקת ה"עד" מתבצעת בזמן פולינומי כנדרש.

ii. נראה שהבעיה ב-NP-Hard באמצעות רדוקציה מ-3SAT לבעיה זו (נסמן 3SATHalf). נגדיר את פונקצית המיפוי F כך: בהינתן נוסחה φ עם n ליטרלים, נוסיף n פסוקיות נוספות לנוסחה המקורית בצורה $\ldots(Ai \vee Ai \vee \overline{Ai})\ldots$. F תחזיר את הנוסחה החדשה.

הוכחת נכונות:
נשים לב שכל אחת מהפסוקיות שהוספנו היא T עבור כל הצבה של Ai. עתה בנוסחה החדשה קיימים 2n ליטרלים. אם קיימת הצבה המספקת את הנוסחה המקורית, הרי שהצבה זו מספקת גם את הנוסחה החדשה. בנוסף, עבור כל ליטרל מקורי שהושם לT נוכל להציב F באחד מהליטרלים החדשים שהוספנו ועבור כל ליטרל מקורי שהושם לF נוכל להציב F באחד מהליטרלים החדשים שהוספנו. סה"כ קיבלנו במידה וקיימת הצבה מספקת לנוסחה המקורית, קיימת גם הצבה המספקת בנוסחה החדשה המקיימת בנוסף את התנאי הדורש בדיוק ממחצית הליטרלים להיות T. לכן, 3SATHalf יחזיר T כנדרש. אם אין הצבה המספקת את הנוסחה המקורית, הרי שגם לא תהיה הצבה המספקת את הנוסחה החדשה ולכן יוחזר F כנדרש.

סבוכיות:
ספירת הליטרלים מתבצעת בזמן לינארי. כמו כן, הוספת הפסוקיות החדשות מתבצעת גם כן בזמן לינארי (כי היא תלויה במספר הליטרלים). סה"כ קיבלנו כי בניית הנוסחה החדשה מתבצעת בזמן פולינומי כנדרש.

הראנו כי 3SATHalf נמצאת ב-NP וכן שקיימת רדוקציית מיפוי פולינומית מ-3SAT אל 3SATHalf ומכאן ש $3SATHalf \in NPC$.

ג. **קלט:** גרף מכוון G=(V,E)
שאלה: האם קיים מעגל המילטון בגרף?

פתרון: בעיה זו היא ב-NPC.

הוכחה:

i. נראה כי הבעיה ב-NP: בהינתן מעגל המילטון אפשרי, נוכל לוודא שאכן המסלול כולל את כל הקודקודים ושבעת "טיול" בגרף על פי הקשתות במעגל, אנו עוברים בכל קודקוד בדיוק פעם אחת. בפעולות אלו נבקר בכל קשת פעם אחת בדיוק (החל מקשת אקראית) ובכל קודקוד פעמיים (פעם אחת בעת סימון הקודקודים שבמעגל ופעם שנייה בעת בדיקה שאכן ביקרנו בכל קודקוד). לכן, הבדיקה מתבצעת בזמן פולינומי ומכאן שהבעיה ב-NP.

ii. נראה שהבעיה ב-NP-Hard באמצעות רדוקציה מ-HamilPath (בעיית מסלול המילטון) לבעיה זו (נסמן HamilCycle). נגדיר את פונקצית המיפוי F כך: בהינתן גרף G=(V,E) ושני צמתים s ו-t ניצור גרף חדש G'=(V',E') בצורה הבאה:

a. נעתיק אל V' את כל הצמתים מ-V. לצמתים שהעתקנו נוסיף צומת חדש v*.

b. אל E' נעתיק את כל הקשתות מ-E. כמו כן, נוסיף קשתות מ-v* אל s ומ-t אל v*.

F תחזיר את הגרף החדש G' בתום בנייתו.

הוכחת נכונות:
תחילה, נשים לב כי במידה ובגרף המקורי היה מעגל המילטון (ולגן גם מסלול המילטון), נוכל להשתמש בקשתות החדשות במקום הקשת המקורית בין t ל-s ולכן במקרה כזה יוחזר T בכל מקרה כנדרש. לכן, נניח כי בגרף המקורי לא קיים מעגל המילטון.

במידה ובגרף המקורי G קיים מסלול המילטון מ-s ל-t, הוספת v* לגרף החדש וחיבור קשת בינו אל s ומ-t אליו תיצור בגרף החדש G' מעגל המילטון ויוחזר T כנדרש.

במידה ובגרף המקורי G לא קיים מסלול המילטון מ-s אל t, לא ייתכן כי קיים בגרף החדש G' מעגל המילטון. נניח בשלילה שקיים מעגל כזה, במעגל זה אנו עוברים בכל קודקוד פעם אחת בלבד ובפרט עוברים פעם אחת ב-v*. v* מחובר במעגל ל-2 קודקודים: s ו-t. לכן כדי לעבור במעגל אנו יוצאים מt אל v* ומשם עוברים אל s. כיוון שקיים מעגל המילטון, בין s ל-t קיים מסלול המילטון המשלים את המעגל. כלומר אם נסיר את v* נקבל מסלול המילטון בסתירה לכך שבגרף ללא v* אין מסלול כזה.

סבוכיות:
העתקת הקשתות והצמתים מהגרף המקורי לגרף החדש מתבצעת בזמן לינארי. הוספת הקודקוד מתבצעת בזמן סופי. חיבור 2 קשת מ-v* אל s וקשת נוספת מ-t אל v* מתבצע בזמן סופי. סה"כ קיבלנו כי המיפוי מתבצע בזמן פולינומי.

הראנו כי HamCycle נמצאת ב-NP וכן שקיימת רדוקציית מיפוי פולינומית מ-HamilPath אל HamilCycle ומכאן ש $\text{HamilCycle} \in NPC$.

ד. **קלט:** גרף מכוון G=(V,E)
שאלה: האם קיימים בגרף 2 מעגלים פשוטים שאינם מחוברים באף קודקוד וכוללים את כל הצמתים בגרף?

פתרון: בעיה זו היא ב-NPC.

הוכחה:

i. נראה כי הבעיה ב-NP: בהינתן 2 מעגלים פשוטים כך שכל קודקוד בגרף שייך בדיוק לאחד מהם, נוכל לוודא שאכן המעגלים כוללים את כל הקודקודים ושבעת "טיול" בגרף על פי הקשתות בכל מעגל, אנו עוברים בכל קודקוד בדיוק פעם אחת. בפעולות אלו נבקר בכל קשת שבמעגלים פעם אחת בדיוק ובכל קודקוד פעמיים (פעם אחת בעת סימון הקודקודים שבמעגל ופעם שנייה בעת בדיקה שאכן ביקרנו בכל קודקוד). לכן, הבדיקה מתבצעת בזמן פולינומי ומכאן שהבעיה ב-NP.

ii. נראה שהבעיה ב-NP-Hard באמצעות רדוקציה מ-HamilCycle (בעיית מעגל המילטון מהסעיף הקודם) לבעיה זו (נסמן 2Cycles). נגדיר את פונקציית המיפוי F כך: בהינתן גרף G=(V,E) ניצור גרף חדש G'=(V',E') בצורה הבאה:

a. נעתיק אל V' את כל הצמתים מ-V. לצמתים שהעתקנו נוסיף שלושה צמתים חדשים v_1, v_2, v_3.

b. אל E' נעתיק את כל הקשתות מ-E. כמו כן, נוסיף את הקשתות המכוונות הבאות: (v_1,v_2), (v_2,v_3), (v_3,v_1).

F תחזיר את הגרף החדש G' בתום בנייתו.

הוכחת נכונות:
לגרף החדש הוספנו למעשה מעגל פשוט המכיל את הקודקודים החדשים v_1, v_2, v_3. לכן, אם בגרף הישן קיים מעגל המילטון, הרי שבגרף החדש קיימים 2 מעגלים פשוטים ללא קודקודים משותפים המקיפים את כל הקודקודים בגרף ולכן עבור G' יוחזר T מ-2Cycles כנדרש.

אם בגרף הישן לא היה מעגל המילטון, אזי בG' לא יהיו 2 מעגלים פשוטים המקיימים את התנאי. נניח בשלילה שכן נוצרו 2 מעגלים המקיימים את התנאי. המעגל שהוספנו נפרד מכל שאר הקודקודים בגרף. לכן, המעגל היחיד בו הצמתים החדשים משתתפים הוא המעגל שיצרנו. לכן, פרט למעגל זה קיים מעגל פשוט נוסף אחר המכיל את כל הקודקודים מהגרף המקורי. כלומר, בגרף המקורי קיים מעגל המילטון בסתירה להנחה שבשלילה.

סבוכיות:
העתקת הקשתות והצמתים מהגרף המקורי לגרף החדש מתבצעת בזמן לינארי. הוספת הקודקודים החדשים והקשתות החדשות מתבצעת בזמן סופי. סה"כ קיבלנו כי המיפוי מתבצע בזמן פולינומי.

הראנו כי 2Cycles נמצאת ב-NP וכן שקיימת רדוקציית מיפוי פולינומית מ-HamilCycle אל 2Cycles ומכאן ש $\text{2Cycles} \in NPC$.

ה. **קלט:** גרף לא מכוון G=(V,E)
שאלה: קיים קליק ב-G בגודל של לפחות |V|/2

פתרון: בעיה זו היא ב-NPC.

הוכחה:

i. נראה כי הבעיה ב-NP: בדומה לבעיית הקליק, בהינתן "עד" אפשרי, נוכל לבדוק האם הוא אכן קליק בגודל ≥ k. בנוסף נוכל לספור את מספר הצמתים בקליק בזמן לינארי ולהשוואות למספר הצמתים הכולל בגרף. לכן, הבדיקה מתבצעת בזמן פולינומי ומכאן שהבעיה ב-NP.

ii. נראה שהבעיה ב-NP-Hard באמצעות רדוקציה מ-Clique לבעיה זו (נסמן CliqueHalf). נגדיר את פונקציית המיפוי F כך: בהינתן גרף G=(V,E) ומספר טבעי k ניצור גרף חדש G'=(V',E') בצורה הבאה:

אם $k < \frac{|V|}{2}$**:**

a. נעתיק אל V' את כל הצמתים מ-V. כמו כן נוסיף |V|-2k צמתים חדשים.
b. אל E' נעתיק את כל הקשתות מ-E. כמו כן, נוסיף קשתות מכל קודקוד חדש שהוספנו לכל קודקוד אחר בגרף.

אם $k \geq \frac{|V|}{2}$**:**

a. נעתיק אל V' את כל הצמתים מ-V. כמו כן נוסיף 2k-|V| צמתים חדשים.
b. אל E' נעתיק את כל הקשתות מ-E.

F תחזיר את הגרף החדש G' בתום בנייתו.

הוכחת נכונות:

אם $k < \frac{|V|}{2}$: בגרף החדש קיימים 2(|V|-k) קודקודים. זהו מספר זוגי כמובן ולכן הערך ש-F מחזירה מוגדר היטב. כמו כן, בגרף החדש יש כבר קליק בגודל |V|-2k קודקודים. אם בגרף המקורי קיים קליק לפחות בגודל k, גודל הקליק יגדל ל-|V|-k (לפחות) ויוחזר T כנדרש. אחרת, לא ניתן יהיה להגיע לקליק בגודל מחצית מהגרף החדש ולכן יוחזר F כנדרש.

אם $k \geq \frac{|V|}{2}$: בגרף החדש קיימים 2k קודקודים. זהו מספר זוגי כמובן ולכן הערך ש-F מחזירה מוגדר היטב. כמו כן, הקודקודים שנוספו לגרף החדש אינם קשורים לאף קודקוד ולכן לא יכולים להגדיל אף קליק. מכאן שאם בגרף המקורי קיים קליק הגדול מ-k, בגרף החדש נקבל קליק הגדול ממחצית מספר הקודקודים ויוחזר T כנדרש. אחרת, לא ניתן יהיה להגיע לקליק בגודל מחצית מהגרף החדש ולכן יוחזר F כנדרש.

סבוכיות:
בדיקת כמות הקודקודים ב-G מתבצעת בזמן לינארי (במקרה הגרוע). העתקת הקשתות והצמתים מהגרף המקורי לגרף החדש מתבצעת בזמן לינארי. הוספת הקודקודים החדשים והקשתות החדשות מתבצעת בזמן פולינומי התלוי במספר הקודקודים והצמתים בגרף. סה"כ קיבלנו כי המיפוי מתבצע בזמן פולינומי.

הראנו כי CliqueHalf נמצאת ב-NP וכן שקיימת רדוקציית מיפוי פולינומית מ-Clique אל CliqueHalf ומכאן ש $\mathrm{CliqueHalf} \in NPC$.

ו. **קלט:** קבוצה S בגודל n, m תתי קבוצות Ai של S ומספר טבעי k
שאלה: קבוצה C (תת קבוצה ל-S) מגודל הקטן שווה ל-K כך שהחיתוך של C עם כל אחת מהקבוצות Ai אינו ריק?

פתרון: בעיה זו היא ב-NPC.

הוכחה:

i. נראה כי הבעיה ב-NP: בהינתן קבוצה C, נוכל לבדוק האם כל האיברים שב-C שייכים ל-S בזמן פולינומי. כמו כן, נוכל לבדוק בקלות שמתקיים $|C| \leq k$. בנוסף, עבור כל איבר בC נוכל לבדוק האם הוא שייך לכל אחת מהקבוצות Ai. קבוצות אליהם האיבר שייך לא נבדוק שנית. סה"כ נקבל שבמקרה הגרוע נבדוק את כל איברי C m פעמים. כלומר נבצע מספר פולינומי של בדיקות. סה"כ קיבלנו שניתן לבצע את הבדיקה בזמן פולינומי.

ii. נראה שהבעיה ב-NP-Hard באמצעות רדוקציה מ-VC לבעיה זו (נסמן Csubset). נגדיר את פונקציית המיפוי F כך: בהינתן גרף G=(V,E) ומספר טבעי k נחזיר קבוצה S=V, תתי קבוצות ל-S (נסמן Ai) ואת k המקורי. את תתי הקבוצות Ai נבנה כך: עבור כל קשת (u,v)∈E נבנה קבוצה Ai={u,v}.

הוכחת נכונות:

אם בגרף המקורי קיימת קבוצת קודקודים J בגודל הקטן שווה ל-k ואשר מהווה VS, קיימת גם קבוצה C=J המקיימת את התנאים של בעיה זו. הסיבה לכך היא שכל קבוצה Ai מייצגת למעשה קשת בגרף המקורי. היות ועבור כל קשת בגרף קיים קודקוד אחד לפחות בJ,

חיתוך של C עם כל אחת מהקבוצות לא יהיה ריק (ויכלול את האיבר שמייצג את הקודקוד). לכן, Csubset יחזיר T כנדרש. אם בגרף המקורי לא קיימת קבוצת קודקודים J בגודל הקטן שווה ל-k ואשר מהווה VS, לא תהיה קיימת קבוצה C אשר תקיים את התנאים של Csubset. נניח בשלילה שכן קיימת כזו קבוצה. כל קבוצה Ai מהווה ייצוג לקשת. לכן, כיוון שכל חיתוך של C עם כל אחת מהקבוצות Ai אינו ריק ושקול לבדיקה "האם אחד מצמתי כל קשת נמצא ב-C" נקבל כי נוכל לבחור J=C בסתירה להנחה שבשלילה.

סבוכיות:
העתקת כל האיברים מ-V אל S מתבצע בזמן לינארי. כמו כן, בניית קבוצות Ai מתבצע בזמן לינארי ביחס למספר הקשתות ב-G (כל קבוצה מייצגת קשת). סה"כ קיבלנו כי המיפוי מתבצע בזמן פולינומי.

הראנו כי Csubset נמצאת ב-NP וכן שקיימת רדוקציית מיפוי פולינומית מ-VC אל Csubset ומכאן ש $\text{Csubset} \in NPC$.

ז. **קלט:** φ נוסחה מסוג 3-CNF
שאלה: האם קיימת השמה בנוסחה המספקת לפחות מחצית מהפסוקיות בנוסחה φ?

פתרון: בעיה זו היא ב-P.

הוכחה:
נראה כי התשובה לשאלה זו היא תמיד T (כלומר זו בעיה טריוויאלית). נניח בשלילה שקיימת נוסחה φ שבה לא ניתן למצוא הצבה אשר יותר ממחצית הפסוקים בה הם T. נבחר הצבה כלשהי A. בהצבה זו, לפחות מחצית מהפסוקיות הן F (ע"פ ההנחה בשלילה). בין כל הפסוקיות שערכן F, לא ייתכן 2 פסוקיות (ולבטח פסוקית אחת) בהן קיים ליטרל כלשהו ושלילתו. הסיבה לכך היא שבתוך כל פסוקית, הליטרלים מחוברים ע"י קשר "או" ולכן אם כן היה מצב כזה, אזי אחת הפסוקיות לפחות הייתה T.

לכן, כל ליטרל a אשר מופיע בפסוקיות שהן F הוא מופיע כ-a או כ-$\bar{a}$. לכן, אם נהפוך את ההצבה של כל אחד מהליטרלים השייכים לפסוקיות אלו, נקבל שהערך של כל הפסוקיות יהיה T, כלומר קיימת הצבה בה יותר ממחצית מהפסוקיות הן T בסתירה להנחה.

הראנו שלכל נוסחה φ קיימת הצבה בה לפחות מחצית מהפסוקיות הן T. לכן זו בעיה טריוויאלית שהתשובה עליה תמיד T ומכאן שניתן לפתור אותה בזמן פולינומי.

4. **נתון:** $3-col \in NPC$.
צ"ל: $k-col \in NPC$ לכל $k \geq 3$.

הוכחה:

א. תחילה נשים לב שk-col היא בNP: בהינתן צביעה כלשהי, נוכל לעבור קשת אחר קשת ולוודא שבכולן מתקיים התנאי. בדיקת כל הקשתות מתבצעת בזמן לינארי ולכן הבדיקה תתבצע בזמן פולינומי.

ב. נראה רדוקציית מיפוי פולינומית $3-col \leq_p k-col$. נכתוב פונקצית מיפוי שתפעל כך: בהינתן גרף G=(V,E) הפונקציה תיצור גרף G'=(V',E') חדש בצורה הבאה:

i. אל 'V נעתיק את כל הצמתים מ-V. בנוסף נוסיף ל-'V עוד k-3 צמתים חדשים.

ii. 'E יכלול את כל הקשתות מ-E ובנוסף יכיל קשתות חדשות בין k-3 שהוספנו לגרף לכל אחד מהצמתים האחרים.

F תחזיר את הגרף החדש 'G בתום בנייתו.

הוכחת נכונות:
לגרף החדש 'G הוספנו k-3 קודקודים חדשים (מוגדר היטב כיוון ש-$k \geq 3$). קודקודים אלו מחוברים בקשת לכל קודקוד אחר בגרף (ובינם לבין עצמם). לכן, כדי שניתן יהיה לעמוד בדרישה לפיה עבור כל קשת (u,v) מתקיים $C(u) \neq C(v)$, על כל אחד מהקודקודים החדשים להיצבע בצבע שונה. נשים לב שאם את הקודקודים של הגרף הישן G ניתן לצבוע ב-3 צבעים שונים תוך שמירת הכלל, הרי שאת הגרף החדש 'G נוכל לצבוע בא k צבעים שונים (נוודא שהצבעים שצבענו את הקודקודים החדשים יהיו שונים מ-3 הצבעים של הגרף המקורי). ולהפך, אם הצלחנו לצבוע את 'G ב-k צבעים שונים, הרי שהקודקודים החדשים נצבעו ב-k-3 צבעים שונים והקודקודים של הגרף הישן G נצבעו ב-3 צבעים נוספים ואחרים (כי קיימות קשתות גם בין הקודקודים הישנים לכל אחד מהקודקודים החדשים). כלומר,
k-col(G')=T אמ"מ 3-cok(G)=T כנדרש.

סבוכיות:
העתקת הקודקודים המקוריים והקשתות המקוריות לגרף החדש מתבצעת בזמן פולינומי (אפילו ליניארי). כמו כן, הוספת k-3 קודקודים וקשתות בין כל קודקוד חדש לכל הקודקודים בגרף החדש מתבצעת בזמן פולינומי גם כן. סה"כ קיבלנו כי F תסתיים בזמן פולינומי כנדרש.

הראנו כי k-col נמצאת ב-NP וכן שקיימת רדוקציית מיפוי פולינומית מ3-col ל-k-col ומכאן ש $k - col \ \in NPC$ לכל $k \geq 3$ כנדרש.

5. הוכח שאם $L \in NPC$ אז $\bar{L} \in coNPC$.

הוכחה:

א. נראה כי $\bar{L} \in coNP$.
נתון כי $L \in NPC$ ולכן בפרט $L \in NP$. מכאן ע"פ ההגדרה $\bar{L} \in coNP$ כנדרש.

ב. נראה כי $\forall \bar{A} \in coNP, \bar{A} \leq_p \bar{L}$.
יהי $A \in NP$. כיוון ש $L \in NPC$ מתקיים $A \leq_p L$. כלומר $x \in A$ אמ"מ $f(x) \in L$.
ומכאן נקבל כי $x \notin A$ אמ"מ $f(x) \notin L$. כלומר, $x \in \bar{A}$ אמ"מ $f(x) \in \bar{L}$. סה"כ קיבלנו כי רדוקצית המיפוי המקורית היא גם רדוקצית מיפוי בין המשלמים.
כלומר מתקיים $\bar{A} \leq_p \bar{L}$ כנדרש.

6. **פתרון:** אף אחת מהתשובות אינה נכונה.

הוכחה:

בתרגול האחרון ראינו כי הבעיה IS⊗Clique∈NP-hard וכן IS⊗Clique∈coNP-hard.
בשיעור ראינו כי קיימות בעיות ב-coNP שאינן ב-NP (לדוגמה: הבעיה המשלימה ל-Clique) ולהפך (למשל: Clique) למרות קיום בעיה זאת ו<u>לכן סעיף א' נפסל</u>.

נראה כי בנוסף מתקיים IS⊗Clique∈R. בהינתן גרף ומספר טבעי k, מספר תתי הקבוצות בגודל k מבין קודקודי הגרף הוא מספר סופי. לכן, נוכל לעבור על כל אפשרות ולבדוק האם היא קליק או IS (ניתן לעשות זאת בזמן סופי). אם נמצא גם קליק וגם IS נחזיר F אחרת נחזיר T. סה"כ קיבלנו בעיה כריעה המקיימת את התנאים ולכן סעיף ב' אינו נכון.

כדי לפסול את סעיף ג' נסתכל על הבעיה המשלימה ל-Halt. ראינו (והוכחנו בתרגילים קודמים) כי $\overline{Halt} \in coRE/R$. נראה כי בנוסף מתקיים $\overline{Halt} \in NP - Hard$ וכן $\overline{Halt} \in coNP - Hard$.

תחילה, ראינו כי Halt∈NP-Hard ולכן $\overline{Halt} \in coNP - Hard$ (ע"פ מה שהוכחנו בחלק השני של תרגיל 5).

שנית, נוכיח כי $\overline{Halt} \in NP - Hard$. נראה זאת באמצעות רדוקצית מיפוי פולינומית מSAT בדומה לרדוקציה משאלה 2. נגדיר פונקציה F שתחזיר פונקציה G הדומה לפונקציה שהוחזרה בתרגיל 2 אך במקרה ונמצא הצבה המספקת את הנוסחה שקיבלנו, G תכנס ללולאה אינסופית, אחרת G תסיים את הבדיקות ותעצור. עתה, אם קיימת הצבה מספקת לנוסחה, G תכנס ללולאה אינסופית ולכן $\overline{Halt}$ יחזיר T כנדרש. אחרת, G תעצור ו-$\overline{Halt}$ תחזיר F כנדרש. לכן, $\overline{Halt} \in NP - Hard$. **הערה:** לא הוספתי הוכחות נכונות וסבוכיות מלאות בחלק זה כיוון שמבחינת שלבי ההוכחה, ההוכחות זהות לאלו שפירטתי בשאלה 2 (עם שינויים מינוריים בלבד).

ראינו כי $\overline{Halt} \in coRE/R$ ובנוסף $\overline{Halt} \in NP - Hard$ וכן $\overline{Halt} \in coNP - Hard$ ולכן גם סעיף ג' נפסל.