

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2(t) = 4x_1 + x_2 \end{cases} \quad \begin{aligned} x_1(0) &= 2 \\ x_2(0) &= -1 \end{aligned}$$

רשות להרשות מינהלי אוניברסיטאות

$$\bar{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \bar{x} = A\bar{x}$$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = 0$$

: A לשונן פולינומיאלי (פונקציית אוניברסיטאות)

הנ' ערך של λ נס' של λ ו- $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3$ (לעומת $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$)

$$(A - \lambda I)\bar{x} = 0$$

כינור רצויים (פונקציית אוניברסיטאות)

$$0 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_1 + x_2 \\ 4x_1 - 2x_2 \end{pmatrix} = 0$$

: $\lambda_1 = 3$ (פונקציית אוניברסיטאות)

... תבונן יי'ם בפונקציית אוניברסיטאות

$$x'(t) = A x(t) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(פונקציית אוניברסיטאות)

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -5 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -(2-\lambda)(2+\lambda) + 5 = \lambda^2 - 4 + 5 = \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i$$

(פונקציית אוניברסיטאות)

$$\begin{pmatrix} 2-i & -5 \\ 1 & -2-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2-i)x_1 - 5x_2 \\ x_1 - (2+i)x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(פונקציית אוניברסיטאות), $\lambda_1 = i$ (פונקציית אוניברסיטאות)

$$(2-i)x_1 - (2-i)(2+i)x_2 = (2-i)x_1 - 5x_2$$

(פונקציית אוניברסיטאות), $x_1 = \frac{(2-i)x_1}{2-i} = x_1$, $x_2 = \frac{-5x_2}{2-i} = -5\frac{x_2}{2-i}$

$$\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} 2+i \\ 1 \end{pmatrix}$$

לפונקציית אוניברסיטאות

$$x_1(t) = e^{it} \bar{x}_1 = (\cos t + i \sin t) \begin{pmatrix} 2+i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2+i)(\cos t + i \sin t) \\ \cos t + i \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos t - \sin t + i(2\sin t + \cos t) \\ \cos t + i \sin t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cos t - \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 2\sin t + \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

$$x_2(t) = \begin{pmatrix} 2\cos t - \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} 2\sin t + \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

(פונקציית אוניברסיטאות), $\lambda_2 = -i$ (פונקציית אוניברסיטאות)

3.1.10

(ב) אם $x_1(t)$, $x_2(t)$ פונקציות מינימיות של t אז $x_1(t) + x_2(t)$ מינימית ו $x_1(t) - x_2(t)$ מקסימלית.

$$\hat{x}_1 = \frac{1}{2}(x_1(t) + x_2(t))$$

$$\hat{x}_2 = \frac{1}{2i}(x_1(t) - x_2(t))$$

לפיכך \hat{x}_1 מינימלי ו \hat{x}_2 מקסימלי.

$$X(t) = C_1 \begin{pmatrix} 2\cos t - \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 2\sin t + \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

ההיברדים נורמלים פה מינימליים ומקסימליים.

$$W = \begin{vmatrix} 2\cos t - \sin t & 2\sin t + \cos t \\ \cos t & \sin t \end{vmatrix} \quad \textcircled{2}$$

ובז"ה ניתן לראות ש $W = \sin^2 t - \cos^2 t = -\sin 2t$.

$$\textcircled{2} \quad \begin{vmatrix} -\sin t & \cos t \\ \cos t & \sin t \end{vmatrix} = -\sin^2 t - \cos^2 t = -1 \neq 0$$

לפיכך $x_1(t)$ מינימלי ו $x_2(t)$ מקסימלי.

C_1, C_2 הם קבועים הינם קבועים.

$$X(0) = C_1 \begin{pmatrix} 2\cos 0 - \sin 0 \\ \cos 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 2\sin 0 + \cos 0 \\ \sin 0 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \textcircled{3}$$

$$\textcircled{3} \quad \begin{pmatrix} 2C_1 + C_2 \\ C_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow C_1 = 0; C_2 = 1$$

לפיכך $x_1(t) = 0$

$$X(t) = \begin{pmatrix} 2\sin t + \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

$J_0, J_{\frac{1}{2}}, J_{\frac{3}{2}}$ הם פונקציות מינימליות!

$$J_0 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} (\leq 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} |x| \cdot \sqrt[n]{|a_n|} = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$$

$$|x| < \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

$R = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ פונקציית קומפוזיט של הנקודות.

כל ∞ הוא מינימלי, ו 0 מקסימלי. לכן x מינימלי בקטע $[0, R]$.