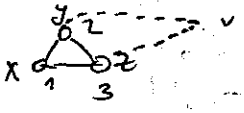
סיבוכיות - תרגול 3

תיפוש לעומת הכרעה

3-Col: **בבעיית ההכרעה:** בהינתן גרף G, האם ניתן לצבוע את קודקודיו בצבעים {1,2,3} כך שכל שני קודקודים סמוכים בצבעים שונים?

בבעיית התיפוש: בהינתן גרף G מצו 3-צביעה חוקית אם קיימת, ואם לא קבלו.

רקע: הראו רדוקציה מבעיית הפיתוש לבעיית ההכרעה של 3-Col. כלומר בלבד רדוקציית Cook בין הבעיות.



פתרון: תחילה נבדוק האם הגרף 3-צביע, אם לא נגמר. נוסף 3 קודקודים x,y,z מחוברים בקשתות (משולש) לגרף G. לכל קודקוד $v \in V$ נפעל את האלגוריתם של בעיית ההכרעה על שלושת הגרפים הבאים:

$G_1 = (V(G'), E(G') \cup \{\{v,y\},\{v,z\}\})$ מחייב לצבוע ב-1.

$G_2 = (V(G'), E(G') \cup \{\{v,x\},\{v,z\}\})$ מחייב את v בצבע 2.

$G_3 = (V(G'), E(G') \cup \{\{v,x\},\{v,y\}\})$ מחייב את v בצבע 3.

נסמן ב-G_i את אחד מהגרפים הללו שבו קיימת 3-צביעה.

את הצבע בגרף G_i, נצבע את v בצבע i.

הנכונות נובעת מכך שבכל איטרציה הגרף הוא 3-צביע, ולכן ניתן לצבוע את v בצבע כלשהו i כך שהצביעה נותרת השמה לצביעה חוקית. במקרה זה לגרף G_i נקבל השמה חוקית.

שפה אונרית היא תת-קבוצה של 1^*. למשל: 1^{13}, הייצוג שלו: 13, בינארי: 1101

טענה/תרגיל: הוכיחו שאם קיימת שפה אונרית NP-שלמה אז P=NP.

* בשפה בינארית, קלט באורך $n \Leftarrow 2^n$ קלטים. בשפה אונרית, יש רק קלט 1 באורך $n \Leftarrow 1$.

ניסיון ראשון לאלגוריתם ל-SAT: SAT($\phi(x_1,\dots,x_n)$)

(1) אם $n=0$ התגר ϕ (נשאר לנו ערך T או F).

(2) התגר את $SAT(\phi(T, x_2, x_3, \dots, x_n))$ או $SAT(\phi(F, x_2, \dots, x_n))$.

* אלגוריתם נאיבי אקספוננציאלי - 2^n.

לפי הרקורסיה מס' הקריאות הרקורסיביות $O(2^n)$.

פתרון: תהי $L \subseteq 1^*$ NP-שלמה אז $SAT \le_p L$, נסמן ב-f את הרדוקציה שלפי נתונה ϕ מתאימה $f(\phi)=1^i$, כאשר $i \le p(n)$ כש-p פולינום.

(n מספר משתני הנוסחה). $(\forall \phi.\ \phi \in SAT \iff f(\phi) \in L)$

*אם שני נוסחאות ממופות ל- 1^{100}, שתיהן ספיקות או שאינן לא ספיקות.
אנשים רושם כי הדבר נוסחאות ממופות לאותה מחרוזת. לכן נוכל לקבל את הקדומיה.

נתאר אלגוריתם ל- SAT שלפי הנחת פולינומיות ונסיק ש- P=NP. נשתמש במתרגם

A שישמור במקום ה-i הבאים $1^i \in L$. $SAT(\phi(x_1, x_2, \dots, x_n), A)$
והמתרגם תמיד מאותחל ל- unknown. המתרגם

(1) אם $n=0$ הרץ ϕ כדי לדעת אם F

(2) אם $A[f(\phi)] \neq$ unknown, נחזיר את $A[f(\phi)]$. נמצא במתרגם, יש תשובה בחלקה משמן.

(3) אם $SAT(\phi(T, x_2, \dots, x_n), A)$ או $SAT(\phi(F, x_2, \dots, x_n), A)$

אזי $T \leftarrow$ $A[f(\phi)]$ נחזיר T.

אחרת $F \leftarrow$ $A[f(\phi)]$ נחזיר F.

נכונות: נבדוק מכך ש- $\phi(x_1, \dots, x_n)$ ספיקה $\iff$ $\phi(T, x_2, \dots, x_n)$ ספיקה או $\phi(F, x_2, \dots, x_n)$ ספיקה.

זמן ריצה: נשאל כמה קריאות רקורסיביות מתבצעות לאורך ההרצה.

*בפועל לא יש קריאות רקורסיביות.

לרור לפי גודל נמוך כפי האפשר שמתאים לקריאה רקורסיבית, (כמובן לא אלה). נסיר מלא ההרצה את המצב המבדיל אלו מהשורש נחזיר לפי צד אשר הלקח יהיה ריק.
בכל צעד כזה $O(n)$ צעדים מסרים מהזכרון. כמו כן, כל מעגל כזה מאריך לתרגם במקום שונה שנרשם במתרגם (כי אחרת לא הייתה מתבצעת קריאה רקורסיבית בגודל שבהכרח מאותחל יותר, לפי שלב ב') בפלוגרמה שאינו היינו מבצעים.

לכן מספר הקריאות הרקורסיביות הוא לכל היותר $O(n \cdot p(n))$. $p(n)$ - מספר המעגלים.
n - מס' הקדקודים מקס'
בכל מעגל לכן מס' הקריאות הרקורס' המקס' בכל מעגל

בכל קריאה כלי מפעלת הרדוקציה f, ולכן זמן הריצה הוא (לוקח $O(n)$)
$O(n \cdot p(n))^2$ שבמובן פולינומיאלי. מקבלים ש- SAT
לוקח זמן פולי' ואז
זה גורר לכך ש- P=NP.

הערה לגבי הבדיקה: בקבלה