מד"ר - שיעור 5

14/11/09

נוסחת Abel

$$u^{(n)}(x)+P_1(x)u^{(n-1)}+P_2(x)u^{(n-2)}+\dots+P_n(x)u=0$$

$$W(x)=\begin{vmatrix} u_1 & \dots & u_n \\ u_1' & \dots & u_n' \\ \vdots & & \\ u_1^{(n-2)}(x) & \dots & u_n^{(n-2)}(x) \\ u_1^{(n-1)}(x) & \dots & u_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

(הוורונסקיאן הוא הכללה של מערכת 2x2)

$$W'(x)=\begin{vmatrix} u_1(x) & & u_n(x) \\ u_1'(x) & & u_n'(x) \\ \vdots & & \\ u_1^{(n-2)}(x) & & u_n^{(n-2)}(x) \\ u_1^{(n)} & u_2^{(n)} \dots & u_n^{(n)}(x) \end{vmatrix}$$

נציב במקום $u_i^{(n)}$ מהמד"ר n-1 איברי המד"ר

נוסיף לשורה ה-n את השורה הראשונה $\times P_n$

השורה השנייה $\times P_{n-1}$

שלישית $\times P_{n-2}$

וכן הלאה, לבסוף נשאר עם הדטרמיננטה:

$$W'(x)=\begin{vmatrix} u_1(x) & u_2(x) & \dots & u_n(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) & & u_n'(x) \\ \vdots & & & \\ -P_1u^{(n-1)} & & & -P_1u_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow W'+P_1W=0$$

$$W=W_0e^{\int P_1(x)dx}$$

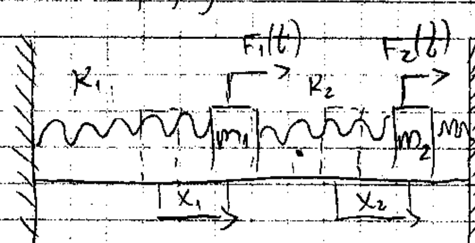
(W_0 הוא ערך הדטרמיננטה בנק' כלשהי)

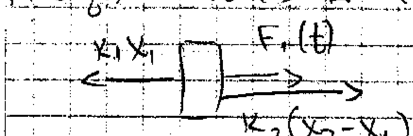
אם $P_1=0$ אז הוורונסקיאן קבוע ממש. דוגמא: $x''+\omega^2x=0$

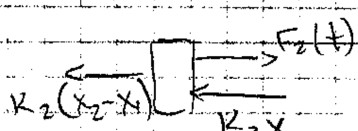
דוגמה

לפי חוק ניוטון: $ma=\sum forces$

(הכוחות הפועלים על כל אחת מהמסות:)







(F הוא כוח נוסף שפועל על המסה בנוסף לכח המשיכה של הקפיץ)

משוואות התנועה:

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = k_2(x_2-x_1)-k_1x_1+F_2(t) = -(k_1+k_2)x_1+k_2x_2+F_1(t) \\ m_2\ddot{x}_2 = -k_3x_2-k_2(x_2-x_1)+F_2(t) = k_2x_1-(k_2+k_3)x_2+F_2(t) \end{cases}$$

($\ddot{x}_1$ זו התאוצה של m_1)

נעביר את שתי המשוואות מסדר 2 למשוואה אחת מסדר 4 $(n=4)$:

$$m_1\ddot{x}_1 = a_{11}x_1+a_{12}x_2+F_1(t)$$
$$m_2\ddot{x}_2 = a_{21}x_1+a_{22}x_2+F_2(t)$$

$$\begin{cases} L_1x_1 = a_{12}x_2+F_1 \quad /\cdot L_2 \\ L_2x_2 = a_{21}x_1+F_2 \end{cases}$$

נסמן: $L_1 = m_1\frac{d^2}{dt^2}-a_{11}$, $L_2 = m_2\frac{d^2}{dt^2}-a_{22}$

$$L_2L_1x_1 = a_{12}L_2x_2+L_2F_1 = a_{12}(a_{21}x_1+F_2)+L_2F_1$$
$$L_2L_1x_1 = a_{12}a_{21}x_1+a_{12}F_2+L_2F_1$$
$$(L_2L_1-a_{12}a_{21})x_1 = F_3(t)$$

כאשר: $F_3(t) = a_{12}F_2+L_2F_1$

$$\left(m_1\frac{d^2}{dt^2}-a_{11}\right)\left(m_2\frac{d^2}{dt^2}-a_{22}\right)x_1 - a_{12}a_{21}x_1 = F_3(t)$$

כדי לפתור את הבעיה ההומוגנית ניקח $F_3=0$ ונחפש פתרון מהצורה e^{rx} ואז הפולינום האופייני הוא

$$\varphi(r) = (m_1r^2-a_{11})(m_2r^2-a_{22})-a_{12}a_{21} = 0$$

תנודות מאולצות, תהודה ורזוננס

(1) $x''+k^2x = F_0\cos(wt)$ (w הוא תדר שמפעילים על המערכת)

לבעיה ההומוגנית - הפתרון הוא: $x = x_0\cos(kt+\varphi_0) =$

(2) $= C_1\cos(w_0t)+C_2\sin(w_0t)$ $\quad \underline{k=w_0}$ (w_0 הוא התדר העצמי)

מכיוון שבמשוואה אין לנו x' בפתרון יוסר רק sin ונותר cos;

(3) $x_p = A\cos wt$

(4) $A = \frac{F_0}{w_0^2-w^2}$

(5) $\boxed{x_p = \frac{F_0}{w_0^2-w^2}\cos wt}$

(6) $x(t) = C_1\cos w_0t+C_2\sin w_0t+\frac{F_0}{w_0^2-w^2}\cos wt$

נניח שבזמן ההתחלתי תנאי ההתחלה $x(0)=0, x'(0)=0$ למרות ש- $F_0=0$

המערכת לא זזה, כלומר המערכת לא מוזנת ב- F_0

נציב ונקבל

$C_1 = \frac{-F_0}{w_0^2-w^2}$, $C_2 = 0$

$$x(t) = \frac{F_0}{w_0^2-w^2}(\cos wt-\cos w_0t)$$

נראה מהו הפתרון כאשר w ו- w_0 קרובים יחסית.

נזכר בנוסחה: $2\sin A\sin B=\cos(A-B)-\cos(A+B)$

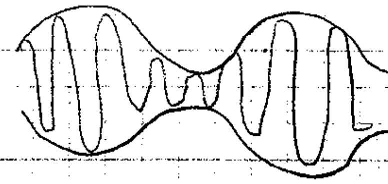
נסמן $A+B=w_0t$, $A-B=wt$

$$x(t)=\frac{2F_0}{w_0^2-w^2}\sin\tfrac{1}{2}(w_0-w)t\cdot\sin\tfrac{1}{2}(w_0+w)t$$

נניח $|w-w_0|<<w_0+w$

$$x(t)=A(t)\sin\tfrac{1}{2}(w_0+w)t$$

$$A(t)=\frac{2F_0}{w_0^2-w^2}\ (w_0-w)t$$



* אם יש שני קולות קרובים זה לזה מבחינת תדר

$$\frac{w}{2\pi}=254Hz$$

$$\frac{w}{2\pi}=$$

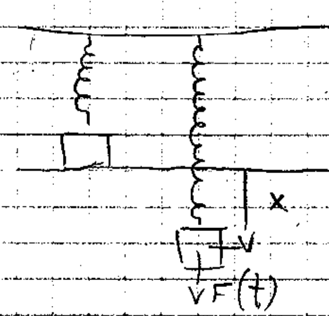
$$\frac{w_0-w}{2}/2\pi=2Hz$$

דוגמה נוספת

$$ma=\sum forces$$

$$m\ddot{x}=-b\dot{x}-cx$$

$$m\ddot{x}+b\dot{x}+cx=\cancel{0}\ F(t)\qquad (\text{כח ההפרעה}=F(t))$$



$$(0)\quad \frac{d^2x}{dt^2}+2h\frac{dx}{dt}+k^2x=f(t)$$

$$(1)\quad x''+2hx'+k^2x=0$$ המש' ההומוגנית:

$$\varphi(r)=r^2+2hr+k^2=0$$

נניח $\Delta=h^2-k^2=-p^2<0$ (תת-ריסון)

$$r_{1,2}=-h\pm ip$$

$$x(t)=e^{-ht}(c_1\cos pt+c_2\sin pt)$$

$$\begin{cases}x(t_0)=x_0\\ x'(t_0)=x_0'\end{cases}$$

C_1 ו- C_2 נקבעים ע"פ תנאי ההתחלה

(p ו- h הם תכונות של המערכת, שאינן תלויים בתנאי ההתחלה

אלא C_1 ו- C_2 שכן תלויים)

מצב של יתר ריסון (over dumped): $h^2-k^2=q^2>0$

$$r_{1,2}=-h\pm q$$

$$x = C_1 e^{-(-q+h)t} + C_2 e^{-(q+h)t}$$

כיוון ש $q<h$ שני הפתרונות דועכים ואין תנודות.

נניח אנו רוצים לפתור את המד"ר $x'' + 2hx' + k^2x = f(t)$

פתרנו כבר $x'' + k^2x = f(t)$

הפתרון במקרה זה $x = \frac{1}{k}\int_0^t f(u)\sin k(t-u)\,du$

נרצה להעביר את הבעיה המקורית לבעיה שפתרנו. אנו צריכים להיפטר מהאיבר $2hx'$

$$x'' + 2hx' + k^2x = 0$$

אנו מחפשים פונ' A כך ש $x = A(x)\cdot y$ שהאיבר יתבטל

$$x = e^{-ht}y$$

$$\boxed{y'' + (k^2-h^2)y = 0}$$

אם החיכוך h קטן, כלומר $x'' + 2\varepsilon x' + k^2x = 0$

ניתן לזנוח את $2hx'$ מכיוון שבפתרון הסופי h^2 רק משפיע בו

המצב, אבל בזמנים ארוכים, $t \sim \frac{1}{\varepsilon} = c$ מ $1 \sim e^{-ht}$

כלומר בזמן ארוך החיכוך יהיה קריטי (דומיננטי).

<u>תהודה</u> (resonance)

$$x_p = \frac{F_0}{w_0^2 - w^2}\cos(wt)$$

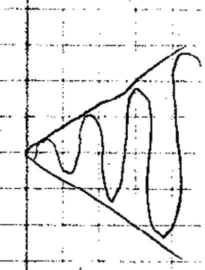
אם $W = W_0$ נחפש פתרון מהצורה

$$x_p(t) = t(A\cos w_0t + B\sin w_0t)$$

נציב ונקבל $A=0$

$$x_p(t) = \frac{F_0}{2w_0}\, t\sin(w_0t)$$

האמפליטודה הולכת וגדלה



עסקנו ב- $x'' + k^2x = \cos wt$, $w = w_0 = u$

<u>תהודה במערכת עם ריסון</u>

$$x'' + 2hx' + k^2x = F_0\cos wt$$

$$x_p(t) = A\cos wt + B\sin wt$$

נציב ונקבל

$$A = \frac{(k^2-w^2)F_0}{(k^2-w^2)^2 + 4(hw)^2}, \quad B = \frac{2hwF_0}{(k^2-w^2)^2 + 4(hw)^2}$$

$$x_p(t) = C_* \cos(wt - \alpha)$$

$A = C_* \cos\alpha$

$B = C_* \sin\alpha$

$C_* = \sqrt{A^2+B^2}$

$$C_* = \frac{F_0}{\sqrt{(k^2-w^2)^2 + 4(hw)^2}}$$

$\sin\alpha = \frac{B}{C_*} > 0$ α ברביע הראשון או השני

נבחן איך המקדם C_* משתנה כפונקציה של w ונבדוק באיזה
תדר מתקבל מקסימום הגובה. קודם נחקור את צורת העקומה
נניח לרגע ש- $w=0$, אז כוח F_0 קבוע הוא כמו:

$$x_p = \frac{F_0}{k^2} = \zeta_0$$

$$\lambda = \frac{C_*}{F_0}$$

λ משמש מדד להתנהגות דינמית של המערכת ביחס לכוח חיצוני

$$\lambda(r) = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2+\gamma^2 r^2}} \quad , \quad r=\frac{w}{w_0} \quad , \quad \gamma = \frac{2h}{k}$$

איך $\lambda(r)$ משתנה? מתי יש לו מקסימום?

$$\frac{1}{\lambda^2} = (1-r^2)^2 + \gamma^2 r^2$$

נבדוק מתי לפונ' הזאת יש מינימום. המינימום מתקבל כאשר $r^2 = 1-\frac{1}{2}\gamma^2$

אם $\gamma^2>2$ אין אקסטרמום ל- $\lambda(r)$ שאומר $C_*(w)$ פונ' יורדת.