7/6/10

לוגיקה - הרצאה 14

(כלל הפרמוטציה / כלל ההחלפה)

$$\frac{\Gamma_1 \Rightarrow s=t \qquad \Gamma_2 \Rightarrow A}{\Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow B}$$

כש-B מתקבל מ-A ע"י החלפה מתאימה (עבור t-נביעה) של s-ים ב-t-ים

* כדאי לעבור על ההוכחה בתשובות של אבנון, יכול להופיע במבחן

תהי T תורה של פסוקים אוניברסליים ו-T^* קבוצת האינסטנציות הסגורות של המשתנים של איברי T.

הוכחה: (של משפט הרבראנד)

M מודל של T הוא מודל של T^* ולכן $M \models T \Rightarrow M \models T^*$

נגדיר $V_M(\varphi) = \begin{cases} t & M \models \varphi \\ f & M \not\models \varphi \end{cases}$ מראים ש-V_M השמה (צריך חוקית)

להראות שזה מקבל את טבלאות האמת - (קל), נותן t לכל איברי T^* לכן מודל במובן של תחשיב הפסוקים של T^*

בכיוון ההפוך: $v \models T^* \to$ השמה במובן של תחשיב הפסוקים

* לקרוא המשך ההוכחה בעותק

פתרון בחינה

(1) לעתים יש לבחור את השפה המתאימה, פה השפה נתונה לנו.
ההנחה שבתחום של R זהה לתחום של המבנה - זהו יחס
R יש תחום D, כשמדברים על רפלקסיביות צריך להגדיר תחום.
ההנחה נועדה שנוכל לכתוב $\forall x.\, R(x,x)$

התשובה ל-א': A

$$A = \forall x R(x,x) \wedge \forall x \forall y \ldots \wedge \forall x \forall y \forall z \ldots$$

הדרישה ב' תחילה נדרוש שיחס סדר R הוא יחס סדר טוב:

$$B = \forall z.\, (set(z) \wedge \exists x (x \in z)) \to \exists x.\, x \in z \wedge \forall y (y \in z \to R(x,y))$$

(נשים לב שזה לא כתוב לפי כללי הדקדוק הרשמיים, יש לראות את $x \in z$ כאילו כתוב $\in(x,z)$) כאשר הפירוש של $set(z)$ הוא ש-z קבוצה חלקית לתחום. הדרישה ב': $A \wedge B$

שאלה ג - כרגע איננו יכולים לעשות זאת. נלמד היום

הגדרת "R יחס סדר מלא"

$C = \forall x \forall y \left(R(x,y) \vee R(y,x) \right)$

הגדרה 2 $A \wedge B \to A \wedge C$ (מספיק ב- $A \wedge B \to C$)

(2) שאלה זו נחלה כישלון במסמך הקודם (כמעט כולם אחד זה פרק)

כרגיל כשרוצים להוכיח גרירה, נניח 33 ו' ונניח 33 ה' $A \wedge B$

זו ההנחה. בסוף מגיעים ל-C על סמך הנחה $A \wedge B$ ולכן

$A \wedge B \to C$.

כיוון ש-R יחס סדר מלא,,, : מ- $A \wedge B$ נובע B

מכוונות $R(A,B) \vee R(B,A)$ על סמך $A \wedge B$ ואז נעשה שימוש כפול

מכלל ההכנסה של $\forall$ בסוף (A ו-B היו כלשהם לכן זה נכון $\forall x$ ו- $\forall y$)

"תהי Z הקבוצה החלקית של היחס שאיבריה הם בדיוק a ו-b":

ההגדרה של המשפט הזה! •

נרשום את ההוכחה בדדוקציה טבעית:

		הנחות רקע	הצדקה
1	$A \wedge B$	1	הנחה
2	B	1	$(\wedge E)$, 1
3	$\forall a \forall b \exists w. (set(w) \wedge \forall y. y \in w \leftrightarrow y = a \vee y = b)$	3	הנחה
4	$\underbrace{set(z)} \wedge \underbrace{\forall y (y \in z \leftrightarrow y = a \vee y = b)}$		

איבריה הם בדיוק a ו-b. z קבוצה חלקית של היחס

יש פה הנחה סמויה שלכל שני עצמים יש קבוצה שמכילה בדיוק

אותם. זו ההצדקה של שורה 3 - ההנחה הנוספת.

תכונה כללית שמניחים פה ביחס לפירוש של set ו- $\in$.

זו שלמת האקסיומות של תורת הקבוצות. יש קבוצה שמכילה

בדיוק a ו-b. בסוף מגיעים $3 \Rightarrow A \wedge B \to C$

(זה נכון לכל הפירושים האפשריים של set ו- $\in$)

$A \wedge B \to C$ זה לא אומר שנכון. זה שאומרים של כל תורה שבה

יש את האקסיומה 3 עבור סימן דו-מקומי $\in$ (או כל סימן

אחר) וסימן חד-מקומי set.

עכשיו צריך להצדיק את 4.

הנחה זמנית (2)

ב-3 יכולנו באותה מידה לכתוב x ו-z במקום a ו-b

3. $\forall x \forall z \exists w (set(w) \wedge \forall y (y \in w \leftrightarrow y=x \vee y=z))$

צריך לעשות על האקסיומה זו, a ו-b, כלומר נסיק

4. $\exists w (set(w) \wedge \forall y (y \in w \leftrightarrow y=a \vee y=b))$ (2)

השמטנו מכלל הסילוק של $\forall$ פעמיים

5. $set(z) \wedge \forall y.\ y \in z \leftrightarrow y=a \vee y=b$ (5)

זה לא נובע משורה 4, זה שקיים w לא אומר ש-z קיים.

צריך להכניס את הדבר הזה שקיים בתור הנחה חדשה.

בסוף נגיע ל- ①,⑤ => c ולכן ①,② => c

כך משתמשים כדי שמשהו קיים. נניח מיצר z משהו

שלא משתמשים במשתנה z.

זה הכלל להכנסה של קיים.

(נשים לב שבהוכחה הזאת משתמשים בכל הכללים של דדוקציה

חוץ מלבד הכלל של ¬)

כדי להשתמש ב-B צריך להסיק $set(z)$ וגם

$\forall y.\ y \in z \leftrightarrow y=a \vee y=b$.

כעת לפי כלל הסילוק של $\forall$ $a \in z \leftrightarrow a=a \vee a=b$

יש לנו של האקסיומה $\forall x\ x=x$ בדדוקציה לוגית בשפה

עם שוויון ונצא לן מכח כלל ההוצאה של $\forall$: $a=a$

כלל ההכנסה של $\vee$ $a=a \vee a=b$

$a \in z$

$\exists x\ x \in z$

כעת צריך להשתמש בודאי $\exists x.\ x \in z \wedge \forall y(y \in z \to R(x,y))$

לכן צריך לעשות הכנה לכלל ההכנסה של קיים. במילים אחרות

"אומר זה" במקום להכניס מילה חדשה.

אז נוסיף הנחה חדשה $d \in z \wedge \forall y(y \in z \to R(x,y))$

כעת יש z אפשרויות: d הוא a או b. משתמשים ב-5

פעם שלישית כדי להגיע ל- $d=a \vee d=b$.

כעת מקבלים: מקרים ש- $d=a$ (הנחה זמנית) ומגיעים למה שצריך

מה שהתבקשנו בשאלה זה שוב וכך לבנות את ההוכחה

(3) $$\varphi = \forall x \forall z \exists w\, (set(w) \wedge \forall y (y \in w \leftrightarrow y = x \vee y = z))$$

$$\psi = A \wedge B \rightarrow C$$

נוכיח: $\varphi \models_{FOL} \psi$.

צריך להביא את $\psi \neg \varphi$ לצורה פרנקס נורמלית ואז לבצע סקולמיזציה.

$$\forall a \forall b \exists w \forall y (set(w) \wedge (y \in w \leftrightarrow y = a \vee y = b))$$

$$\forall a \forall b \forall y (set(g(a,b)) \wedge (y \in g(a,b) \leftrightarrow y = a \vee y = b))$$

אח"כ צריך להמשיך הלאה (לא כמו במבחן) ואז כדאי להביא לצורה יותר נוחה. נכניס את $\forall y$:

$$\forall a \forall b (set(g(a,b)) \wedge \forall y \dots)$$

$$\forall a \forall b (set(g(a,b)) \wedge \forall a \forall b \forall y$$

הם שקולים על סמך שקילות של $\wedge$ וכך ניתן להפריד לשני פסוקים שונים יותר קצרים וזה טוב כדי להשתמש בנפרד הרבה.

T: $\forall a \forall b\ set(g(a,b))$

$\forall a \forall b \forall y\ y \in g(a,b) \leftrightarrow y = a \vee y = b$

$\neg\psi \equiv A \wedge B \wedge \neg C$

ושוב מפרידים ל-3 פסוקים

A $\begin{cases} \forall x\, R(x,x) \\ \text{אנטי-סימטרי} \\ \text{טרנזיטיבי} \end{cases}$

נמצא סקולמיזציה ל-B: תחילה נחליף שמות משתנים קשורים

$$B = \forall z. (set(z) \wedge \exists w (w \in z)) \rightarrow \exists x. x \in z \wedge \forall y (y \in z \rightarrow R(x,y))$$

נשים לב ש- $\exists w$ יוצא החוצה כ- $\forall$ ו- $\exists x$ כ- $\exists$.

ניתן להוציא מה שנרצה קודם

כי לא ... להוציא קודם את $\exists x$

כדי לא ליצור תלות ל- $\exists$:

$$\forall z \exists x \forall w \forall y (set(z) \wedge w \in z \rightarrow x \in z \wedge (y \in z \rightarrow R(x,z)))$$

עכשיו צריך להיפטר מ- $\exists$ ע"י הכנסת סימן פונקציה חדש - f. Δ

ונוסיף פסוק זה לקבוצה T. כעת יש להוסיף $\neg C$

$$\neg C = \exists x \exists y (\neg R(x,y) \wedge \neg R(y,x))$$

נניח 2 קבועים חדשים c, d $\quad \neg R(c,d) \wedge \neg R(d,c)$

ושוב נפריד לשניים ונוסיף ל-T:

$\neg R(c,d)$

$\neg R(d,c)$

זה עדיין לא התורה T, חסרות פה אקסיומות השוויון.
אני משתמש חוץ מאקסיומות השוויון, יש להכניס ל-T את
אקסיומות השוויון הרלוונטיות..
נשים לב שהשפה המקורית L היא: $=$, set, $\in$, R
השפה החדשה כוללת: $L^* = L \cup \{g, c, d\}$
צריך להכניס את אקסיומות השוויון שקשורות ל-set, $\in$ ו-R.
(לא צריך את אקסיומות השוויון של c - של הסימנים החדשים)
נוסיף את האקסיומות הבאות: $\forall x\, x=x$
$\forall x \forall y\, (x=y \to y=x)$
טרנזיטיביות
set סימן יחס חד-מקומי ולכן יש רק אקסיומת שוויון אחת
שצריך להוסיף: $\forall x \forall y.\ x=y \wedge set(x) \to set(y)$
אקסיומת השוויון המתאימה ל-R: צריך לב בהתחלה כי זה יחס דו-
מקומי $\forall x_1 \forall y_1 \forall x_2 \forall y_2\ x_1=y_1 \wedge x_2=y_2 \wedge R(x_1,x_2) \to R(y_1,y_2)$
(אקסיומות אלו נחוצות בהוכחה למשפט הקודם שלא נחוצה והבאה)
והאקסיומה המתאימה ל-$\in$ תהיה זהה רק שצריך להחליף את R
ב-$\in$. $x_1 \in x_2 \to y_1 \in y_2$

$\forall z \forall y \forall w\, (set(z) \wedge w \in z \to f(z) \in z \wedge (y \in z \to R(f(z), y)))$ Δ

קבוצת האינסטנציות הסגורות T^*:
$\neg R(c,d)$
$\neg R(d,c)$
האינסטנציה היחידה שצריך לרשום מה מהפסוק הראשון ב-T: $set(g(c,d))$
אלה אינסטנציות של הפסוק השני:
$c \in g(c,d) \to c=c \vee c=d$
$d \in g(c,d) \to d=c \vee d=d$
$f(g(c,d)) \in g(c,d) \to f(g(c,d))=c \vee f(g(c,d))=d$

ב. ב' R היה חלק מהשפה ו-ג' אומר משהו ספציפי על (4)
R של השפה. נראה כאילו התשובה היא:
$\forall R\, (A \wedge B \to \forall x \forall y\ R(x,y) \vee R(y,x))$
זה לא התשובה כי כשכותבים $\forall R$ אז R הוא משתנה השפה
[illegible]

אך R הוא סימן יחס של השפה ולכן לא יכול להיות גם משתנה (R יכול להיות או משתנה או סימן יחס ולא שניהם)
לכן זה לא נוסחה מסדר ראשון.

<u>הפתרון</u>: (תיקון את הנוסחה לנוסחה מסדר ראשון)
נרצה להתייחס ל-R. כמו עצם (כדי להגיע $\forall R$).
כדי לעשות זאת לה 3 עצמים - R,x,y נוסיף יחס תלת-מקומי
בין 3 עצמים: $Holds(R,a,b)$ שאומר שהיחס R מתקיים עבור
a ו-b, כלומר $\langle a,b\rangle \in R$.

$$\forall R\left(A\wedge B \rightarrow \forall x\forall y\, Holds(R,x,y) \vee Holds(R,y,x) \right)$$

ה-A ו-B צריך לעשות אותו דבר: $R(x,z)$ יתורגם
ל $Holds(R,x,z)$ וכך הלאה. B לעולם הופך להיות נוסחה
לא פסוק כי R חופשי ב-B לפי ההחלפה הזו

$$\forall x\forall y\, N(x)\wedge F(y) \rightarrow N(App(y,x))$$

אם x הוא מספר ו-y פונ' אזי y מופעל על x זה מספר.

להשלים דברים שלא נעשו בכיתה מדפי ההרצאות.