מעבר פתרון מהמן לדוגמה

(1) (ב)

$$\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left(x^2\frac{du}{dx}\right)+u=0$$

$$\frac{1}{x^2}\left[2xu'+x^2u''\right]+u=0$$

$$\frac{2}{x}u'+u''+u=0 \quad \backslash\cdot x$$

נגדיר $V=ux \Leftarrow V'=u'x+u \Leftarrow V''=u''x+2u'$

$$\overbrace{2u'+u''x}+ux=0$$

$$V''+V=0$$

נחפש פתרון מהצורה $u(x)=e^{rx}$. נציב במשוואה ונקבל:

$$r^2+1=0 \Rightarrow r=\pm i$$

מכאן כי פתרון המשוואה הוא

$$V(x)=c_1\cos(x)+c_2\sin(x)$$

כלומר

$$V_1(x)=\cos(x)$$

$$V_2(x)=\sin(x)$$

ולכן,

$$\boxed{\begin{aligned}u_1(x)&=\frac{\cos(x)}{x}\\ u_2(x)&=\frac{\sin(x)}{x}\end{aligned}}$$

(ג) הייתי אומר שטרם אבל לא בעיה אין מה כל כך לחכות...

יש למישהו רעיון?

② ⅱ

מגדר
פתרון לבחינה
מבחן

$$\bar{y}' = A\bar{y} \Rightarrow \bar{y}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \bar{y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

(א) נמצא ע"ע המטריצה:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & -2 \\ 3 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \underset{\text{פיתוח}}{=} (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 + 4\right]$$

$$1-\lambda_1 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = 1}$$

$$(1-\lambda)^2 + 4 = 0 \Rightarrow (1-\lambda)^2 = -4 \Rightarrow (1-\lambda) = \pm 2i$$

$$\boxed{\lambda_{2,3} = 1 \mp 2i}$$

(ב) נמצא ו':

$$(A - \lambda I)V = 0$$

$$V_1: \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} V_1 = 0 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow \frac{R_2}{-4}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_1 \leftarrow R_1 - 2R_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} t \\ -\frac{3}{2} \\ t \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$V_2: \begin{pmatrix} -2i & 0 & 0 \\ 2 & -2i & -2 \\ 3 & 2 & -2i \end{pmatrix} V = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -2i & 0 & 0 \\ 2 & -2i & -2 \\ 3 & 2 & -2i \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 \leftarrow \frac{R_2}{2}]{R_1 \leftarrow \frac{R_1}{-2i}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -i & -1 \\ 3 & 2 & -2i \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \leftarrow -3R_1]{R_2 \leftarrow R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & -1 \\ 0 & 2 & -2i \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow \frac{R_3}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & -1 \\ 0 & 1 & -i \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow -iR_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & -1 \\ 0 & -i & -1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{t}{=} \begin{pmatrix} s \\ ti \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$V_3: \begin{pmatrix} 2i & 0 & 0 \\ 2 & 2i & -2 \\ 3 & 2 & 2i \end{pmatrix} V = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2i & 0 & 0 \\ 2 & 2i & -2 \\ 3 & 2 & 2i \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & i & -1 \\ 3 & 2 & 2i \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & -1 \\ 0 & 1 & i \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow V_3 = \begin{pmatrix} s \\ -ti \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}$$

לכן הפתרון הכללי הוא:

$$Y_h(t) = C_1 \cdot V_1 \cdot e^{t} + C_2 \cdot e^{(1+2i)t} V_2 + C_3 \cdot e^{(1-2i)t} V_3$$

$$= C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} + e^{t}\left[C_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} (\cos 2t + i \sin 2t) + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ -1 \end{pmatrix} (\cos 2t - i \sin 2t) \right]$$

$$= C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} + e^{t}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ -C_2 \sin 2t + C_3 \sin 2t \\ +C_2 \cos 2t - C_3 \cos 2t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ (C_2 + C_3)\cos 2t \\ (C_2 + C_3)\sin 2t \end{pmatrix} \right] \Leftarrow$$

המשך ②

לאחר פתרון המתמן לעיל

פתרון:

$$\boxed{Y_h(t) = c_1 e^{t}\begin{pmatrix}1\\-\frac{3}{2}\\1\end{pmatrix} + \bar{c}_2\begin{pmatrix}0\\-\sin 2t\\\cos 2t\end{pmatrix}e^{t} + \bar{c}_3\begin{pmatrix}0\\\cos 2t\\\sin 2t\end{pmatrix}e^{t}}$$

ב.

$$y' = Ay \qquad A = \begin{pmatrix}6 & -3\\2 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}6-\lambda & -3\\2 & 1-\lambda\end{vmatrix} = (1-\lambda)(6-\lambda)+6 = 0$$

$$6-\lambda-6\lambda+\lambda_2+6=0$$

$$\lambda_2-7\lambda+12=0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{7\pm\sqrt{49-4\cdot 12}}{2} = \frac{7\pm 1}{2} \begin{cases}\lambda_1=4\\\lambda_2=3\end{cases}$$

ג.

(מצא) וקטורים עצמיים

$$(A-\lambda I)v=0$$

$$v_1: \begin{pmatrix}2 & -3\\2 & -3\end{pmatrix}v=0 \longrightarrow \begin{pmatrix}2 & -3\\0 & 0\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}\frac{3}{2}t\\t\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$$

$$v_2: \begin{pmatrix}3 & -3\\2 & -2\end{pmatrix}v=0 \longrightarrow \begin{pmatrix}3 & -3\\0 & 0\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}t\\t\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

לכן הפתרון הכללי

$$Y_h(t) = c_1\cdot e^{4t}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} + c_2 e^{3t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$Y(0) = c_1\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c}3 & 1 & 1\\2 & 1 & 3\end{array}\right) \xrightarrow[R_1\leftarrow R_1-R_2]{} \left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & -2\\2 & 1 & 3\end{array}\right) \xrightarrow[R_2\leftarrow R_2-2R_1]{} \left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & -2\\0 & 1 & 7\end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l}c_1=-2\\c_2=7\end{array}$$

ולכן,

$$Y(t) = -2e^{4t}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} + 7e^{3t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \underline{e^{4t}\begin{pmatrix}-6\\-4\end{pmatrix} + e^{3t}\begin{pmatrix}7\\7\end{pmatrix}}$$

ד. נמצא T ונבדוק שהיא הפיכה

$$T = \begin{pmatrix}3 & 1\\2 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & \frac{1}{3}\\2 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & \frac{1}{3}\\0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$$

לכן המטריצה T הפיכה, יש לנו בכלל כי

$$e^{At} = Te^{Dt}T^{-1}$$

(מצא)

$$T^{-1} = \left(\begin{array}{cc|cc}3 & 1 & 1 & 0\\2 & 1 & 0 & 1\end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc}1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0\\2 & 1 & 0 & 1\end{array}\right) \xrightarrow[R_2\leftarrow -2R_1]{} \left(\begin{array}{cc|cc}1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0\\0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1\end{array}\right) \xrightarrow[R_1-R_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 1 & -1\\0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1\end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 1 & -1\\0 & 1 & -2 & 3\end{array}\right)$$

ולכן

$$e^{At} = Te^{Dt}T^{-1} = \begin{pmatrix}3 & 1\\2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{4t} & 0\\0 & e^{3t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\-2 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 1\\2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{4t} & -e^{4t}\\-2e^{3t} & 3e^{3t}\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{e^{At} = \begin{pmatrix}3e^{4t}-2e^{3t} & -3e^{4t}+3e^{3t}\\2e^{4t}-2e^{3t} & -2e^{4t}+3e^{3t}\end{pmatrix}}$$

(ניתן לוסיף הסמלים הבא ...)

המשך (2)

מגדר

פתרון לבחינה לדוגמה

ג - אופטימיזציה שניתן (לשקה ש T אינה הפיכה)

e^{At} שקיים לטריידה הסיפרית הקונית, נמצא אותה:

$$y(t) = c_1 e^{4t}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} + c_2 e^{3t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

עבור $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$:

$$c_1 \cdot e^0\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^0 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c}3&1&1\\2&1&0\end{array}\right) \xrightarrow[R_1 \leftarrow R_1 - R_2]{} \left(\begin{array}{cc|c}1&0&1\\2&1&0\end{array}\right) \xrightarrow[R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1]{} \left(\begin{array}{cc|c}1&0&1\\0&1&-2\end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l}c_1 = 1\\c_2 = -2\end{array}$$

עבור $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$:

$$c_1 e^0\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} + c_2 e^0\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c}3&1&0\\2&1&1\end{array}\right) \xrightarrow[R_1 \leftarrow R_1 - R_2]{} \left(\begin{array}{cc|c}1&0&-1\\2&1&1\end{array}\right) \xrightarrow[R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1]{} \left(\begin{array}{cc|c}1&0&-1\\0&1&3\end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l}c_1' = -1\\c_2' = 3\end{array}$$

סה"כ נקבל כי

$$e^{At} = \begin{pmatrix} c_1 v_1 e^{4t} + c_2 v_2 e^{3t} & c_1' v_1 e^{4t} + c_2' v_2 e^{3t} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{e^{At} = \begin{pmatrix} 3e^{4t} - 2e^{3t} & -3e^{4t} + 3e^{3t} \\ 2e^{4t} - 2e^{3t} & -2e^{4t} + 3e^{3t} \end{pmatrix}}$$

$$y'' + 3y' + 2y = g(x)$$

פתרון מתמן לדוגמה במבר

(3)

ג. נראה כי את פתרון המבר ניתן לרשום כ"ס סכום של פתרון פרטי ופתרון הומוגני

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

נציב במבר ונקבל:

$$\underbrace{(y_h'' + 3y_h' + 2y_h)}_{0} + \underbrace{(y_p'' + 3y_p' + 2y_p - g(x))}_{0} = 0$$

(y_h פתרון הומוגני של המבר) (y_p פתרון פרטי של המבר)

נפתור את הבעיה באמצעות שיטת וריאציה הפרמטרים.

מהיות פתרון הומוגני לבעיה $y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2$ נחפש פתרון פרטי מהצורה:

$$y_p(x) = u_1(x)\, y_1(x) + u_2(x)\, y_2(x)$$

נגזור

$$y_p'(x) = u_1' y_1 + u_1 y_1' + u_2' y_2 + u_2 y_2'$$

נוסיפו דרישת תיפש ולכן ניקח לדוגמה $u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0$.

$$y_p'(x) = u_1 y_1' + u_2 y_2'$$

$$y_p''(x) = u_1' y_1' + u_1 y_1'' + u_2' y_2' + u_2 y_2''$$

נציב במבר ונקבל

$$\underbrace{u_1(y_1'' + 3y_1' + 2y_1)}_{0} + \underbrace{u_2(y_2'' + 3y_2' + 2y_2)}_{0} + u_1' y_1' + u_2' y_2' = g(x)$$

(פתרון הומוגני) (פתרון הומוגני)

סה"כ קיבלנו

$$\begin{cases} u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0 \\ u_1' y_1' + u_2' y_2' = g(x) \end{cases}$$

ונשתמש בשיטת קרמר ונקבל

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ g(x) & y_2' \end{vmatrix}}{W} = \frac{-y_2 g(x)}{W} \Rightarrow u_1 = -\int \frac{y_2 g(x)}{W}\,dx$$

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & g(x) \end{vmatrix}}{W} = \frac{y_1 \cdot g(x)}{W} \Rightarrow u_2 = \int \frac{y_1 g(x)}{W}$$

$$y'' + 3y' + 2y = g(x)$$

(3)

פתרון מתאים לוויכוח בשא"ר

פ.ה. (א) את הפתרון ההומוגני. נחפש פתרון מהצורה $y = e^{rx}$

$$r^2 \cancel{e^{rx}} + 3r\cancel{e^{rx}} + 2\cancel{e^{rx}} = 0$$

$$r^2 + 3r + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 = -2, \quad r_2 = -1$$

לכן, הפתרון ההומוגני הינו

$$\boxed{y_h(x) = c_1 \cdot e^{-2x} + c_2 e^{-x}}$$

נמצא את הפתרון הפרטי השיטת וריאציית הפרמטרים:

$$W = \begin{vmatrix} e^{-2x} & e^{-x} \\ -2e^{-2x} & -e^{-x} \end{vmatrix} = -e^{-3x} + 2e^{-3x} = \underline{\underline{e^{-3x}}}$$

$$u_1 = -\int \frac{e^{-x} \cdot e^{-2x}}{e^{-3x}} dx = -\int dx = -x + \bar{c}_1$$

$$u_2 = \int \frac{e^{-2x} \cdot e^{-2x}}{e^{-3x}} dx = \int e^{-x} dx = -e^{-x} + \bar{c}_2$$

לכן, הפתרון הפרטי

$$\boxed{y_p(x) = -x \cdot e^{-2x} - e^{-2x}}$$

סה"כ קיבלנו

$$\boxed{y(x) = \tilde{c}_1 e^{-2x} + \tilde{c}_2 e^{-x} - x e^{-2x}}$$

נמצא את $\tilde{c}_1$ ו $\tilde{c}_2$ לפי תנאי התחלה:

$$y(0) = \tilde{c}_1 + \tilde{c}_2 = 0$$

$$y'(x) = -2\tilde{c}_1 e^{-2x} - \tilde{c}_2 e^{-x} - e^{-2x} + 2xe^{-2x} \Rightarrow y'(0) = -2\tilde{c}_1 - \tilde{c}_2 - 1 = 0 \Rightarrow \tilde{c}_2 = -2\tilde{c}_1 - 1$$

$$\tilde{c}_1 - 2\tilde{c}_1 - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{\tilde{c}_1 = -1} \Rightarrow \boxed{\tilde{c}_2 = 1}$$

ולכן הפתרון הינו:

$$\boxed{y(x) = -e^{-2x} + e^{-x} - xe^{-2x}}$$

$$y' = a(x) + b(x)\,y + c(x)\,y^2$$

(4)

פתרון עבור לקראת המבחן

ש. זו משוואת ריקאטי. לכן, בהינתן פתרון y_1 נתבע פתרון

מהצורה: $y = y_1 + z$

נציב במד"ר ונקבל

$$y_1' + z' = a(x) + b(x)\,y_1 + b(x)\,z + c(x)(y_1+z)^2$$

$$y_1' + z' = a(x) + b(x)\,y_1 + b(x)\,z + c(x)\,(y_1^2 + 2y_1 z + z^2)$$

$$\underline{y_1'} + z' = \underline{a(x)} + \underline{b(x)\,y_1} + b(x)\,z + \underline{c(x)\,y_1^2} + c(x)\cdot 2y_1 z + c(x)\,z^2$$

התלקים המסומנים בקו מחלים את המד"ר כי מדבר y_1, y_1 הוא פתרון לכן נשאר עם:

$$z' = b(x)\,z + c(x)\,2y_1 z + c(x)\cdot z^2$$

$$z' = (b(x) + c(x)\,2y_1)\,z + c(x)\,z^2$$

$$z' - (b(x) + c(x)\,2y_1)\,z - c(x)\,z^2 = 0 \quad \backslash : z^2$$

נציב $u = \frac{1}{z} \Leftarrow u' = -\frac{1}{z^2}\cdot z'$

$$\frac{z'}{z^2} - (b(x) + c(x)\,2y_1)\cdot\frac{1}{z} - c(x) = 0$$

$$\boxed{u' + (b(x) + c(x)\cdot 2y_1)\cdot u + c(x) = 0}$$

קיבלנו מד"ר מסדר ראשון. באמצעות פתרון u ניתן למצוא את z (ישירות) וע"י z (מצא) את y (גם כן ישירות). לכן קישור הד"ר הוא בקישור פתרון מד"ר מסדר 1.

ב. נציב $y_1 = x$, $c(x) = 1$, $b(x) = -2x$, $a(x) = 1 + x^2$ ונקבל

$$u' + (-2x + 2x)\,u + 1 = 0$$

$$u' = -1 \Rightarrow u = -\int 1\,dx = -x + c$$

לכן,

$$z = \frac{1}{x+c}$$

ומכאן,

$$\boxed{y = x + \frac{1}{-x+c}}$$

הצב דרך לשאלה את הנשבר!

סה"כ קיבלנו

$$\boxed{y(x) = c_1 x + \frac{c_2}{-x+c}}$$