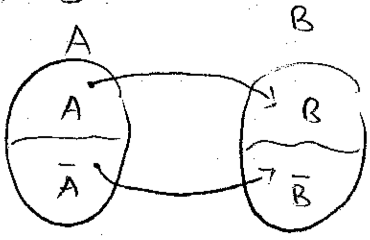
17/3/09

סיבוכיות - תרגול 2



רדוקציות Karp / Cook

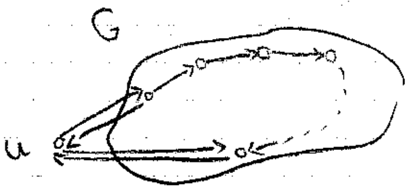
רדוקציית Karp (מיפוי) משפה A לשפה B היא פונקציה f המקיימת

$f(x)\in B \iff x\in A$. $\forall x\in\{a_i\}^*$ (נסמן $A\le_p B$) אם קיימת

רדוקציית Karp מ-A ל-B שניתן לממש בזמן פול'.

נגדיר: $HamCycle = \{ G \mid$ G גרף מכוון ויש בו מעגל המילטון, כלומר מעגל שעובר דרך כל צומת ב-G בדיוק פעם אחת $\}$

$HamPath = \{ G \mid$ G גרף מכוון ויש בו מסלול המילטון $\}$



דוגמה: $HamPath \le_p HamCycle$

הרדוקציה: בהינתן גרף $G=(V,E)$ נחזיר גרף

$G' = (V\cup\{u\}, E\cup(\{u\}\times V)\cup(V\times\{u\}))$

ניתן לממש את הרדוקציה בזמן פול'.

נכונות: ב-G יש מסלול המילטון $\iff$ ב-G' יש מעגל המילטון.

$\boxed{\Leftarrow}$ אם ב-G יש מסלול המילטון $v_1\to v_2\to\dots\to v_n$ אז בצירוף הקשתות $v_n\to u\to v_1$ נקבל מעגל המילטון ב-G'.

$\boxed{\Rightarrow}$ אם ב-G' יש מעגל המילטון אז הוא בהכרח עובר דרך u ובהסרת u נקבל מסלול המילטון ב-G. ■

שאלה: האם המחלקה NP סגורה תחת רדוקציות Karp פול'?

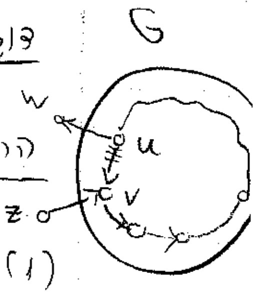
(כלומר, האם לכל L, L', אם $L\in NP$ וגם $L'\le_p L$ אזי $L'\in NP$)

תשובה: כן. נסמן ב-f את הרדוקציה מ-L' ל-L. $L'\in NP$:

בהינתן קלט x העד יהיה העד שמוכיח ש-$f(x)\in L$ (יש כזה כי $L\in NP$

רדוקציית Cook משפה A לשפה B היא אלגוריתם שמכריע את A תוך שימוש באלגוריתם שמכריע את B (כאשר כל קריאה לאלג' שמכריע את B תחשב כצעד אחד בזמן הריצה)

הערה: רדוקציית Karp היא מקרה פרטי (חלשה יותר) של רדוקציית Cook משום שבה למעשה יש קריאה אחת לאלגוריתם שמכריע את B, וכן התשובה לאלג' שמכריע את A היא בדיוק הערך המוחזר.



דוגמה: נראה $HamCycle \underset{\text{פול' Cook}}{\le} HamPath$

הרדוקציה: נראה אלג' ל- $HamCycle$ (נסמן את הקלט ב- $G=(V,E)$)

(1). $E'=E$

(2). אם $E'=\emptyset$ נחזיר "אין מעגל המילטון".

(3). נבחר קשת כלשהי $(u,v)\in E'$

(4). אם $Hampath(G'=(V\cup\{w,z\}, E'\cup\{(z,v),(u,w)\}))$ נחזיר "יש מעגל המילטון".

(5). $E'=E'\setminus\{(u,v)\}$

(6). נחזור ל-(2).

שאלה: האם המחלקה NP סגורה תחת רדוקציות Cook פול'? (האם לכל L,L', אם $L\in NP$ וגם $L'\underset{\text{פול' Cook}}{\le}L$ אז $L'\in NP$)

טענה: NP סגורה תחת רדוקציות Cook פול' $\Leftrightarrow NP=coNP$.

הוכחה: $\boxed{\Leftarrow}$ נניח ש- NP סגורה תחת רדוקציות Cook פול'. נשים לב שלכל L מתקיים $\bar{L}\underset{\text{פול' Cook}}{\le}L$ (כי ניתן להחזיר את התשובה ההפוכה לתשובה שמחזיר האלג' של L על אותו קלט). לכן לכל $L\in NP$ גם $\bar{L}\in NP$, כלומר $coNP\subseteq NP$.

[הערה: אם $C_1\subseteq C_2$ אזי $coC_1\subseteq coC_2$:

$L\in coC_1 \Rightarrow \bar{L}\in C_1 \Rightarrow \bar{L}\in C_2 \Rightarrow L\in coC_2$

לכן נקבל $NP=co(coNP)\subseteq coNP$. מסה"כ $NP=coNP$.

$\boxed{\Rightarrow}$ נניח $NP=coNP$, תהיינה $L\in NP^{(=coNP)}$, $L'\underset{\text{פול' Cook}}{\le}L$, ונראה $L'\in NP$.

מהנתון קיים אלג' פול' A שמכריע את L' תוך שימוש באלג' שמכריע את L. בהינתן קלט x לשפה L', האלג' A משתמש באלג' שמכריע את L k פעמים. העד עבור הקלט x יהיה $a_1,a_2,\dots,a_k\in\{0,1\}$ התשובות שמחזיר האלגוריתם שמכריע את A במהלך הריצה על x ובנוסף עדים $w_1,\dots,w_k$ לכך שהתשובות a_i נכונות. האלג' המוודא יסמלץ את A ובמקום כל קריאה לאלג' שמכריע את L ישתמש ב- a_i כתשובה ויוודא בעזרת w_i כי התשובה נכונה. נשים לב ש- $L\in NP$ וגם $L\in coNP$ ולכן קיימים עדים כנדרש.

אם כל הצעדים המשווים לתשובות אם וכן המעגל A החזיר שהקלט
בשפה נקבל ואחרת נדחה.